

Quantum R-matrix for  $G_2$  and a solvable lattice  
model in statistical mechanics

丸大理 国場敦夫 (Atsuo Kuniba)

PART I. Quantum R-matrix

1.  $G_2$  のルート系

- カルタン行列  $(A_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$

$$A_{11} = A_{22} = 2, \quad A_{12} = -3, \quad A_{21} = -1$$

- 単純ルート  $\alpha_1, \alpha_2,$

$$\text{但し内積が } \langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 2, \quad \langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = \frac{2}{3}, \quad \langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = -1$$

で与えられるものとする。

- 基本ウェイト  $\bar{\Lambda}_1, \bar{\Lambda}_2$

$$\bar{\Lambda}_1 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2, \quad \bar{\Lambda}_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$$

- 最高ルート  $\theta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$

後の便宜上, アフィンリ-環  $G_2^{(1)}$  についとも以下の  
ような記号を用意しておく。

- カルタン部分代数  $\mathfrak{g}$

- 基本ウェイト  $\Lambda_0, \Lambda_1, \Lambda_2$

$$\rho = \Lambda_0 + \Lambda_1 + \Lambda_2$$

- ・ カルタン部分代数の双対

$$\mathfrak{g}^* = \mathbb{C}\Lambda_0 \oplus \mathbb{C}\Lambda_1 \oplus \mathbb{C}\Lambda_2 \oplus \mathbb{C}\delta \quad (\delta: \text{null root})$$

- ・  $\mathfrak{g}^*$  の内積  $\langle, \rangle$

$$\langle \Lambda_i, \Lambda_j \rangle = \langle \bar{\Lambda}_i, \bar{\Lambda}_j \rangle$$

$$\langle \delta, \delta \rangle = 0, \quad \langle \delta, \Lambda_0 \rangle = \langle \delta, \Lambda_2 \rangle = 1, \quad \langle \delta, \Lambda_1 \rangle = 2$$

$$\bar{\Lambda}_i = \Lambda_i - \langle \Lambda_i, \delta \rangle \Lambda_0$$

## 2. 量子化された展開環 $U_q(\mathfrak{g}_2)$

以下では  $q \in \mathbb{C}^*$ ,  $q^n \neq 1 \quad \forall n \in \mathbb{Z}$  とする。

- ・ 生成子  $X_i^\pm, H_i \quad (i=1, 2)$

- ・ 関係式

$$[H_i, H_j] = 0, \quad [H_i, X_j^\pm] = \pm A_{ji} X_j^\pm, \quad [X_1^\pm, X_2^\mp] = 0,$$

$$[X_1^+, X_1^-] = \frac{q^{3H_1} - q^{-3H_1}}{q^3 - q^{-3}}, \quad [X_2^+, X_2^-] = \frac{q^{H_2} - q^{-H_2}}{q - q^{-1}}$$

$$(X_1^\pm)^2 X_2^\pm - \frac{[6]}{[3]} X_1^\pm X_2^\pm X_1^\pm + X_2^\pm (X_1^\pm)^2 = 0,$$

$$(X_2^\pm)^4 X_1^\pm - [4] (X_2^\pm)^3 X_1^\pm X_2^\pm + \frac{[3][4]}{[2]} (X_2^\pm)^2 X_1^\pm (X_2^\pm)^2 \\ - [4] X_2^\pm X_1^\pm (X_2^\pm)^3 + X_1^\pm (X_2^\pm)^4 = 0$$

- ・ 余積  $\Delta: U_q \longrightarrow U_q \otimes U_q$

$$H_i \longmapsto H_i \otimes 1 + 1 \otimes H_i$$

$$X_1^\pm \longmapsto X_1^\pm \otimes q^{-\frac{3}{2}H_1} + q^{\frac{3}{2}H_1} \otimes X_1^\pm$$

$$X_2^\pm \mapsto X_2^\pm \otimes q^{-\frac{1}{2}H_2} + q^{\frac{1}{2}H_2} \otimes X_2^\pm$$

ここで  $[u] = \frac{q^u - q^{-u}}{q - q^{-1}}$  である。

・ 既約  $U_q$  加群  $V_\Lambda$  ( $\Lambda \in \{\lambda_1 \bar{\alpha}_1 + \lambda_2 \bar{\alpha}_2 \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$ )

最高ウェイトベクトル  $v(\Lambda)$  から生成される。

$$X_i^+ v(\Lambda) = 0, \quad H_i v(\Lambda) = \frac{2\langle \Lambda, \alpha_i \rangle}{\langle \alpha_i, \alpha_i \rangle} v(\Lambda) \quad (i=1,2).$$

3. 基本表現  $\pi: U_q \rightarrow \text{End}(V_{\bar{\alpha}_2})$

最高ウェイト加群  $V_{\bar{\alpha}_2}$  を考える。ウェイトは

以下で与えられる。

| $\epsilon_{-3}$                         | $\epsilon_{-2}$       | $\epsilon_{-1}$ | $\epsilon_0$ | $\epsilon_1$ | $\epsilon_2$             | $\epsilon_3$              |
|---|-----------------------|-----------------|--------------|--------------|--------------------------|---------------------------|
| $\bar{\alpha}_2 = \alpha_1 + 2\alpha_2$ | $\alpha_1 + \alpha_2$ | $\alpha_2$      | 0            | $-\alpha_2$  | $-(\alpha_1 + \alpha_2)$ | $-(\alpha_1 + 2\alpha_2)$ |

今後、これらを上のように  $\{\epsilon_\mu \mid -3 \leq \mu \leq 3\}$  と名付け

る。  $\epsilon_{-\mu} = -\epsilon_\mu$ ,  $\epsilon_3 = \epsilon_1 + \epsilon_2$  に注意。

各ウェイト空間は1次元、従って  $\dim V_{\bar{\alpha}_2} = 7$  である。

・  $v_\mu$  ( $-3 \leq \mu \leq 3$ ): ウェイト  $\epsilon_\mu$  の正規ウェイトベクトル  $v \in V_{\bar{\alpha}_2}$

・  $E_{\mu\nu}$ :  $V_{\bar{\alpha}_2}$  の行列単位。即ち  $E_{\mu\nu} v_\lambda = \delta_{\nu\lambda} v_\mu$ 。

・ 基本表現  $\pi: U_q \rightarrow \text{End}(V_{\bar{\alpha}_2})$

$$\pi(X_1^+) = {}^t \pi(X_1^-) = E_{12} + E_{-2-1}$$

$$\pi(X_2^+) = {}^t \pi(X_2^-) = E_{23} + rE_{01} + rE_{-10} + E_{-3-2}$$

$$\pi(H_1) = -E_{22} + E_{11} - E_{-1-1} + E_{-2-2}$$

$$\pi(H_2) = -E_{33} + E_{22} - 2E_{11} + 2E_{-1-1} - E_{-2-2} + E_{-3-3}.$$

但し  $\nu = \sqrt{[2]}$ ,  $t$  は転置の意。特に最高ル - ト  
ベクトル  $\nu = \nu_{112}$ .

$$\pi(X_{\bar{0}}^{\dagger}) = {}^t \pi(X_{\bar{0}}) = E_{-23} + E_{-32}$$

$$\pi(H_{\bar{0}}) = E_{-2-2} + E_{-3-3} - E_{33} - E_{22}.$$

4. 対  $(\mathfrak{G}_2^{(1)}, \pi)$  に対応する quantum R-matrix.

$R(u) = R(u, q) \in \text{End}(V_{\lambda_2} \otimes V_{\lambda_2})$  ( $u \in \mathbb{C}$ ) と  $L^2$   
次の i) ~ iii)  $\in \text{End}(V_{\lambda_2} \otimes V_{\lambda_2})$  の解と  $L^2$  一意的に  
定まる。

$$i) [R(u), \Delta(U_q)] = 0$$

$$ii) R(u) (X_{\bar{0}} \otimes q^{\frac{3}{2}H_{\bar{0}}} + q^{-2u} q^{-\frac{3}{2}H_{\bar{0}}} \otimes X_{\bar{0}}) \\ = (q^{-2u} X_{\bar{0}} \otimes q^{\frac{3}{2}H_{\bar{0}}} + q^{-\frac{3}{2}H_{\bar{0}}} \otimes X_{\bar{0}}) R(u)$$

$$iii) R(0) = \text{identity}$$

この解は Yang-Baxter 方程式  $\in \text{End}(V_{\lambda_2}^{\otimes 3})$  をみたす。

$$(R(u) \otimes 1) (1 \otimes R(u+v)) (R(v) \otimes 1) = (1 \otimes R(v)) (R(u+v) \otimes 1) (1 \otimes R(u)).$$

•  $\tau$  -  $\nu$  の積  $V_{\lambda_2} \otimes V_{\lambda_2}$  の  $\Delta(U_q)$  による既約分解

$$V_{\lambda_2} \otimes V_{\lambda_2} = V_{2\lambda_2} \oplus V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus V_0$$

$$\text{次元 } 7 \times 7 = 27 + 14 + 7 + 1$$

• スペクトル分解.

i) から  $R(u) = \sum_{\lambda=2\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, 0} f_{\lambda}(u) P_{\lambda}$  を得る。

但し,  $f_{\lambda}(u)$  は固有値,  $P_{\lambda} : V_{\bar{\lambda}_2} \otimes V_{\bar{\lambda}_2} \rightarrow V_{\lambda}$  は直交射影子である。これは先の既約分解の際の  $q$ -Clebsch-Gordan 係数を用いて構成される。

その具体形から以下が示される。

$$P_{\lambda} X_{\bar{0}} \otimes q^{\frac{3}{2}H_{\bar{0}}} P_{\lambda} = P_{\lambda} q^{-\frac{3}{2}H_{\bar{0}}} \otimes X_{\bar{0}} P_{\lambda} \neq 0$$

$$\text{if } \lambda \in \{2\bar{\lambda}_2, \bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2\}$$

$$P_{\lambda} X_{\bar{0}} \otimes q^{\frac{3}{2}H_{\bar{0}}} P_{\lambda'} = -P_{\lambda} q^{-\frac{3}{2}H_{\bar{0}}} \otimes X_{\bar{0}} P_{\lambda'} q^{-\frac{3}{2}(c(\lambda)-c(\lambda'))} \neq 0$$

$$c(\lambda) = \langle \lambda, \lambda + 2\rho \rangle$$

$$\text{if } (\lambda, \lambda') \text{ or } (\lambda', \lambda) \in \{(\bar{\lambda}_1, 2\bar{\lambda}_2), (\bar{\lambda}_2, 2\bar{\lambda}_2), (0, \bar{\lambda}_1)\}$$

これらと ii), iii) を結合すると  $\lambda$  の値が次のように決定される。

$$[4][6] f_{\lambda}(u) = [1+u][4+u][6+u] \quad \lambda = 2\bar{\lambda}_2$$

$$= [1-u][4+u][6+u] \quad \lambda = \bar{\lambda}_1$$

$$= [1+u][4-u][6+u] \quad \lambda = \bar{\lambda}_2$$

$$= [1-u][4+u][6-u] \quad \lambda = 0$$

## PART II. 可解格子模型.

PART II の議論は文献 E. Date, M. Jimbo, A. Kuniba  
T. Miwa and M. Okado "One dimensional configuration

sums in vertex models and affine Lie algebra characters" Letters in Mathematical Physics 17 (1989) 69. と内容的に平行している。

### 1. 可解な face 模型

- $\mathcal{L}$ : 2次元正方格子.
- $I$ :  $G_2^{(1)}$  のレベル 1 の integral ウェイトの集合. 即ち  

$$I = \{a_0\Lambda_0 + a_1\Lambda_1 + a_2\Lambda_2 \mid a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}, a_0 + 2a_1 + a_2 = 1\}$$
- $\mathcal{L}$  の各格子点  $i$  に  $I$  の元  $\sigma^{(i)}$  を割り当てる。但し、  
 全 2 の最隣接格子点の対  $(i, j)$  につき

$$\sigma^{(i)} - \sigma^{(j)} \in \{E_\mu \mid -3 \leq \mu \leq 3\} \quad \text{という制限下で。}$$

このような割り当て方の一つ一つを配置と呼ぶ。

- PART I の quantum R-matrix を

$$R(u, q) = \sum_{\mu\nu\kappa\lambda} R(u, q)_{\mu\nu\kappa\lambda} E_{\mu\kappa} \otimes E_{\nu\lambda} \quad \text{とかく。}$$

- $\mathcal{L}$  の最小単位の正方形 (以下 face と呼ぶ) を考え、  
 その 4 頂点上にある  $I$  の元を左上から時計まわりに  
 $a, b, c, d$  とする。  $u$  と  $q$  のスカラー関数  $W_u \left( \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right)$   
 を以下で定義する。

$$W_u \left( \begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix} \right) = R(u, q)_{\mu\nu\kappa\lambda} \quad \text{if } \begin{matrix} b-a = E_\kappa, c-b = E_\lambda \\ d-a = E_\mu, c-d = E_\nu \end{matrix}$$

$$= 0$$

その他。

- 分配関数

$$Z = \sum_{\text{配置}} \prod_{\text{faces}} W_u \left( \begin{array}{cc} \sigma^{(i)} & \sigma^{(j)} \\ \sigma^{(e)} & \sigma^{(k)} \end{array} \right)$$

$Z$  は各配置の実現確率の規格化を与える。

- 局所状態確率 (Local State Probability, LSP)

$a \in I$  に対し

$$\text{Prob}(\sigma^{(i)} = a) = Z^{-1} \sum_{\text{配置}} \delta_{a\sigma^{(i)}} \prod_{\text{faces}} W_u \left( \begin{array}{cc} \sigma^{(i)} & \sigma^{(j)} \\ \sigma^{(e)} & \sigma^{(k)} \end{array} \right)$$

とおく。定義より、

$$\sum_{a \in I} \text{Prob}(\sigma^{(i)} = a) = 1$$

に注意。以下の目標は遠方での適当な境界条件のもとに上の LSP を求めること。

## 2. 1次元状態和

- 計算は Baxter による corner transfer matrix 法を用いる。

詳細についてはプロリット RIMS-664 を参照のこと。本質的なのは

i)  $q \rightarrow 0$  の様子を調べることにより帰着できる。

ii) この時配置は  $I$  の元の 1次元列  $\{\sigma^{(j)}\}_{j \in \mathbb{Z}}$  でラベルされる。

ii) は R-matrix を用いて先に定義した  $W_u \left( \begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array} \right)$  が次のような振子舞いをすることによる。(注意!)  $\delta_{bd}$

$$\lim_{\substack{q \rightarrow 0 \\ w = q^{-2u} : \text{fix}}} W_u \left( \begin{array}{cc} a & b \\ d & c \end{array} \right) w^{-k} = \delta_{bd} w^{H(b-a, c-b)}$$

$$\text{ここぞ} \quad H(\epsilon_\mu, \epsilon_\nu) = \begin{cases} 0 & \mu < \nu \\ 1 & \text{その他} \end{cases}$$

但し例外  $H(\epsilon_{-3}, \epsilon_3) = -1$ ,  $H(\epsilon_0, \epsilon_0) = 0$ .

以下では  $0 < q < 1$ ,  $0 < w = q^{-2u} < 1$  を仮定する。

- $I$  の元の 1 次元列  $\{\sigma_k^{(j)}\}_{j \in \mathbb{Z}}$   $k = 0, 1, 2$  を次のように定義する。

$$\sigma_k^{(j)} = \begin{cases} \Lambda_0 & \text{if } j \equiv k \pmod{2} \\ \Lambda_2 & \text{その他} \end{cases} \quad k = 0, 1$$

$$\sigma_2^{(j)} = \Lambda_2 \quad \forall j$$

ii) に従って 2 配置を 1 次元列  $\sigma^{(j)}$  によってラベルした時遠方での境界条件  $\sigma^{(j)} = \sigma_k^{(j)}$   $|j| \gg 1$  のもとでの LSP  $\text{Prob}(\sigma^{(1)} = a)$  を  $P(a | \sigma_k)$  とかく。

- Corner transfer matrix 法の適用結果は以下の通り。

$$P(a | \sigma_k) = \lim_{m \rightarrow \infty} P_m(a | \sigma_k^{(m+1)}, \sigma_k^{(m+2)})$$

$$P_m(a | b, c) = \frac{q^{-6\langle a, P \rangle} f_m(b-a, c-b; q^{2q})}{\sum_{a' \in I} q^{-6\langle a', P \rangle} f_m(b-a', c-b; q^{2q})}$$

ここで、関数  $f_m(\gamma, \epsilon_\nu; q)$  ( $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ ,  $\gamma \in \mathbb{Z}\epsilon_1 + \mathbb{Z}\epsilon_2 + \mathbb{Z}\epsilon_3$ ) は 1 次元状態和と呼ばれる  $q$ -多項式 2 次のように定義される。

$$f_m(\gamma, \epsilon_\mu; q) = \sum q^{\sum_{j=1}^m j H(\gamma^{(j)}, \gamma^{(j+1)})}$$

但し、和は  $\gamma^{(1)}, \dots, \gamma^{(m+1)} \in \{\epsilon_\nu \mid -3 \leq \nu \leq 3\}$  かつ

$$\sum_{j=1}^m \gamma^{(j)} = \gamma, \quad \gamma^{(m+1)} = \epsilon_\mu$$

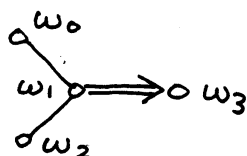


の制限のもとにとる。

3. うめこみ  $G_2^{(1)} \subset B_3^{(1)}$  とストリーング関数

$m \rightarrow \infty$  での  $f_m$  はアフィンリ-環の対  $G_2^{(1)} \subset B_3^{(1)}$  から  
 生じる  $G_2^{(1)}$  のストリーング関数の類似物を用いて表わさ  
 れる。以下では次のような記号を用いる。

- $G_2^{(1)}$  の生成子  $x_i^\pm, h_i, d \quad i=0,1,2$
- $B_3^{(1)}$  の生成子  $\hat{X}_i^\pm, \hat{H}_i, \hat{d} \quad i=0,1,2,3$
- $B_3^{(1)}$  のカルタン部分代数  $\hat{\mathcal{L}}$
- $B_3^{(1)}$  の基本ウェイト  $\omega_i \quad i=0,1,2,3$



$\hat{\mathcal{L}}$  の双対空間  $\hat{\mathcal{L}}^* = \mathbb{C}\omega_0 \oplus \dots \oplus \mathbb{C}\omega_3 \oplus \mathbb{C}\hat{\delta}$   
 ( $\hat{\delta}$ : null 1 $\nu$ -t)

最高ウェイト  $\omega$  の integral 既約  $B_3^{(1)}$  加群  $L(\omega)$

$$L(\omega)_\mu = \{v \in L(\omega) \mid hv = \mu(h)v, \forall h \in \hat{\mathcal{L}}\}$$

• この時うめこみ  $\phi^*: G_2^{(1)} \hookrightarrow B_3^{(1)}$  は次のように与えら  
 れる。

$$\begin{aligned} \phi^*(x_0^\pm) &= \hat{X}_0^\pm & \phi^*(h_0) &= \hat{H}_0 \\ \phi^*(x_1^\pm) &= \hat{X}_2^\pm & \phi^*(h_1) &= \hat{H}_2 \\ \phi^*(x_2^\pm) &= \hat{X}_1^\pm + \hat{X}_3^\pm & \phi^*(h_2) &= \hat{H}_1 + \hat{H}_3 \\ \phi^*(d) &= \hat{d} \end{aligned}$$

• この  $\phi^*$  は 次の  $\phi: \hat{\mathcal{L}}^* \rightarrow \mathcal{L}^*$  を引き起こす。

$$\phi(\omega_0) = \Lambda_0, \quad \phi(\omega_1) = \Lambda_2$$

$$\phi(\omega_2) = \Lambda_1, \quad \phi(\omega_3) = \Lambda_2$$

$$\phi(\hat{\delta}) = \delta$$

• 上の  $\phi$  を用いて,  $a \in I$  に対し

$$\hat{I}_a = \{ \hat{a} \in \mathbb{Z}\omega_0 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}\omega_3 \mid \hat{a} \text{ はレベル } 1, \phi(\hat{a}) = a \}$$

とおく。

• 定理.

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} q^{\star} f_m(\sigma_k^{(m+1)} - a, \sigma_k^{(m+2)} - \sigma_k^{(m+1)}; q) \\ = \sum_{\hat{a} \in \hat{I}_a} \sum_i \dim L(\omega_{\hat{k}}) \hat{a} - i\hat{\delta} q^i \end{aligned}$$

$$(\hat{\delta} = 0, \hat{1} = 1, \hat{2} = 3)$$

• 注意 1. 右辺はうめこみ  $\phi^*$  により  $L(\omega_{\hat{k}})$  を  $G_2^{(1)}$  加群と見た時の  $G_2^{(1)}$  のレベル 1 のストリング関数である。

• 注意 2.  $\wedge$  き  $\star$  の具体形は RIMS-664 参照のこと。

これにより, LSP は次のように表わされる。

$$\text{Pr}(\sigma_k) = \frac{\sum_{\hat{a} \in \hat{I}_a} \sum_i \dim L(\omega_{\hat{k}}) \hat{a} - i\hat{\delta} q^{-\delta \langle \phi(\hat{a} - i\hat{\delta}), \rho \rangle}}{\sum_{\hat{\mu}} \dim L(\omega_{\hat{k}})_{\hat{\mu}} q^{-\delta \langle \phi(\hat{\mu}), \rho \rangle}}$$

$B_3^{(1)}$  のレベル 1 のストリング関数の具体的表式を用い

2計算すると以下の結果を得る。

$$a = a_0 \Lambda_0 + a_1 \Lambda_1 + a_2 \Lambda_2, \quad a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{Z}, \quad a_0 + 2a_1 + a_2 = 1$$

$$q^{-1} P(a|\sigma_1) \pm q P(a|\sigma_0)$$

$$= \begin{cases} \frac{2\varphi(\mp q^{1/2}) E(\mp q^{36}, q^{72})}{D_+ + D_-} q^{6\langle a, 2a-p \rangle - 1} & \text{if } a_2 \equiv 0 \pmod{3} \\ \pm \frac{2\varphi(\mp q^{1/2}) E(\mp q^{12}, q^{72})}{D_+ + D_-} q^{6\langle a, 2a-p \rangle + 3} & \text{\textcircled{E}の\textcircled{I}他} \end{cases}$$

$$P(a|\sigma_2)$$

$$= \begin{cases} \frac{E(-1, q^{72})}{D_0} q^{6\langle a, 2a-p \rangle + 10} & \text{if } a_2 \equiv 0 \pmod{3} \\ \frac{E(-q^{24}, q^{72})}{D_0} q^{6\langle a, 2a-p \rangle + 2} & \text{\textcircled{E}の\textcircled{I}他} \end{cases}$$

$$\text{但し. } D_{\pm} = E(\pm q^2, q^{24}) E(\pm q^4, q^{24}) E(\pm q^{10}, q^{24}) \varphi(\pm q^{1/2})$$

$$D_0 = E(-q^2, q^{24}) E(-q^8, q^{24}) E(-q^{10}, q^{24})$$

$$\varphi(x) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - x^j)$$

$$E(z, x) = \prod_{j=1}^{\infty} (1 - zx^{j-1}) (1 - z^{-1}x^j) (1 - x^j)$$

詳細については数理解析研究所レポート RIMS-664

を参照されたし。