Pfaffian Identities and Their Applications

名古屋大学多元数理科学研究科
岡田 聡一 (Soichi OKADA)

1　はじめに

パフィアンは，約 200 年前に Pfaff [28] によって偏微分方程式系の研究の過程で導入された.（パフィアンの歴史については，[17] を参照されたい.）その後，行列式との関係などパフィアンに関するさまざまな公式などが見出されてきているが，パフィアンは行列式の特別な場合として見過ごされがちである．例えば，岩波数学辞典第 4 版では，パフィアンは「97 行列式」の特殊な行列式の 1 項目として簡単に扱われているだけである.（パフィアンの定義は「342 特性類」のところで与えられている.）

しかし，組合せ論など多くの分野でパフィアンやパフィアンを用いた公式が不可欠な道具となっている．例えば，1960 年代には，パフィアンを経由することによって，Kasteleyn [16] はある種のグラフの完全マッチングの個数の閉じた表式を導き，Gordon–Houten [4] はある種の平面分割の母関数を積の形にあらわす公式を得ている．その後，平面分割の数え上げ組合せ論では，岡田 [23] が与えられた行列の小行列式の和を 1 つのパフィアンで表す公式を与え，totally symmetric plane partition の母関数を 1 つのパフィアンで表す公式を導いている．また，Stembridge [31] は岡田の小行列式の和公式の lattice path 版を用いて totally symmetric plane partition の個数を 1 つのパフィアンで表し，巧妙な議論を用いてそのパフィアンを計算することによって，Andrews–Robbins の予想の $q = 1$ の場合を証明している．そして最近では，Koutschan–Kauers–Zeilberger [19] は，岡田 [23] のパフィアン表示をもとに，計算機の助けを全面的に借りることによって，Andrews–Robbins の予想の一般の場合の解決に成功している．さらに，岡田 [23] の小行列式の和公式や石川–若山 [12] によるさまざまな一般化（小行列式の重みつき和をパフィアンで表す）は，組合せ論，表現論などの数多くの問題に利用されている．その他にも，広田 [5] で解説されているように，ソリトン方程式の理論においてもパフィアンやその間の関係式は重要な役割を果たしている．

本稿の目的は，パフィアンに関する公式とその応用の一部を解説することである．本稿の前半（§2 〜 §4）では，行列式と対比させて，パファインの基本的な性質や公式を証明を交えながら紹介する．そして，後半（§5 〜 §7）では，Schur のパフィアンの一般化，小行列式の和公式を与え，それらの Schur 関数の和への応用について説明する．雑誌「数学」の論説 [9] と重なる部分もあるが，本稿では論説 [9] で証明を省略した一般のパフィアンに関する公式に証明を与えている．Cauchy 型の行列式・パフィアン，小行列式の和公式の詳細や交代符号行列の数え上げ問題などへの応用については，論説 [9] やそこに挙げた論文を参照されたい．

記号

本稿で用いる記号をまとめておく．

非負整数全体のなす集合を $\mathbb{N}$ と表す．正整数 n に対して，$[n] = \{1, \cdots, n\}$ とおき，n 次対称群（$[n]$ 上の置換全体のなす群）を $\mathfrak{S}_n$ と表す．対称群 $\mathfrak{S}_n$ の元 π に対して，π を $\pi = (\pi(1), \cdots, \pi(n))$ のように 1 行で表示し，π の符号を $\mathrm{sgn}(\pi)$ と表す．また，集合 $[n]$ の r 元部分集合の全体を $\binom{[n]}{r}$ と表し，部分集合 $I \in \binom{[n]}{r}$ と，I の元を小さい順に並べてできる列を同一視することにする．

m, n, r, s を非負整数とする．$m \times n$ 行列 $X = (x_{ij})_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ と行添字の列 $I = (i_1, \cdots, i_r)$，列添字の列 $J = (j_1, \cdots, j_s)$ が与えられたとき，X から第 i_1 行，$\cdots$，第 i_r 行，第 j_1 列，$\cdots$，第 j_s 列を取り出してできる $r \times s$ 行列を $X(I; J)$ と表す：

$$X(I; J) = \left(x_{i_p, j_q}\right)_{1 \le p \le r, 1 \le q \le s}.$$

X が正方行列（例えば反対称行列）で $I = J$ である場合は，$X(i_1, \cdots, i_r; i_1, \cdots, i_r)$, $X(I; I)$ をそれぞれ単に $X(i_1, \cdots, i_r)$, $X(I)$ と表すことにする．一方，$I = \{i_1, \cdots, i_r\} \in \binom{[m]}{r}$, $J = \{j_1, \cdots, j_s\} \in \binom{[n]}{s}$ に対して，X から第 i_1 行，$\cdots$，第 i_r 行，第 j_1 列，$\cdots$，第 j_s 列を取り除いてできる $(m - r) \times (n - s)$ 行列を $X^{i_1, \cdots, i_r}_{j_1, \cdots, j_s}$，あるいは，$X^I_J$ と表す：

$$X^{i_1, \cdots, i_r}_{j_1, \cdots, j_s} = X^I_J = X([m] - I; [n] - J).$$

行列の行添字，列添字が非負整数で与えられる場合も，同様の記号を用いる．

2　行列式とパフィアンの定義

行列式，パフィアンの定義から始める．行列式，パフィアンを定義するには，

(1) 置換にわたる和として行列の成分を用いて書き下す，

(2) 外積代数を用いて標準基底の最高次の外積の係数を取り出す，

(3) 展開公式を用いて帰納的に与える，

(4) 多重線型性と交代性によって特徴づける，

などいくつかの方法があるが，ここでは (1) の定義から出発する．

定義 2.1.　(1) n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$ に対して，

$$\det A = \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} \mathrm{sgn}(\pi) a_{1,\pi(1)} a_{2,\pi(2)} \cdots a_{n,\pi(n)} \tag{1}$$

とおき，A の**行列式**（determinant）と呼ぶ．

(2) $2m$ 次対称群 $\mathfrak{S}_{2m}$ の部分集合 $\mathfrak{F}_{2m}$ を

$$\mathfrak{F}_{2m} = \left\{ \pi = (\pi(1), \cdots, \pi(2m)) \in \mathfrak{S}_{2m} : \begin{array}{l} \pi(1) < \pi(3) < \cdots < \pi(2m-1), \\ \pi(2i-1) < \pi(2i) \ (i = 1, \cdots, m) \end{array} \right\}$$

とおいて定める．このとき，$2m$ 次反対称行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i, j \le 2m}$ $(a_{ji} = -a_{ij})$ に対して，

$$\mathrm{Pf}\, A = \sum_{\pi \in \mathfrak{F}_{2m}} \mathrm{sgn}(\pi) a_{\pi(1),\pi(2)} a_{\pi(3),\pi(4)} \cdots a_{\pi(2m-1),\pi(2m)} \tag{2}$$

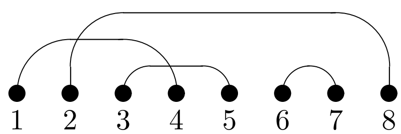
とおき，A の**パフィアン**（Pfaffian）と呼ぶ．

例えば，$m=2$ のとき，$\mathfrak{F}_4=\{(1,2,3,4),(1,3,2,4),(1,4,2,3)\}$ であり，4 次反対称行列のパフィアンは

$$\mathrm{Pf}(a_{ij})_{1\le i,\,j\le 4}=a_{12}a_{34}-a_{13}a_{24}+a_{14}a_{23}$$

で与えられる．反対称行列やそのパフィアンは，上三角部分の成分のみで決まるので，$(a_{ij})_{1\le i<j\le 2m}$ や $\mathrm{Pf}(a_{ij})_{1\le i<j\le 2m}$ のように表すこともある．

パフィアンの定義で用いた集合 $\mathfrak{F}_{2m}$ は，$2m$ 個の頂点をもつ完全グラフ K_{2m} の完全マッチング全体，あるいは，集合 $[2m]$ の m 個の 2 元部分集合への分割全体とも同一視できる．このように同一視したとき，符号は次のようにして求められる．xy 平面において，x 軸上に $2m$ 個の点 $(1,0)$, $(2,0)$, $\cdots$, $(2m,0)$ をとる．与えられた $\pi\in\mathfrak{F}_{2m}$ に対して，$(\pi(1),0)$ と $(\pi(2),0)$ を，$\cdots$，$(\pi(2m-1),0)$ と $(\pi(2m),0)$ をそれぞれ上半平面内の弧で結んだときにできる交点の個数を k とすると，$\mathrm{sgn}(\pi)=(-1)^k$ である．例えば，$\pi=(1,4,2,8,3,5,6,7)$ のとき，



であり，$\mathrm{sgn}(\pi)=(-1)^2$ となる．

また，集合 $\mathfrak{F}_{2m}$ は，$\mathfrak{S}_{2m}$ の剰余類の完全代表系としてとらえることもできる．m 次対称群 $\mathfrak{S}_m$ の元 σ に対して，$2m$ 次対称群 $\mathfrak{S}_{2m}$ の元 $\widetilde{\sigma}$ を

$$\widetilde{\sigma}=(2\sigma(1)-1,2\sigma(1),2\sigma(2)-1,2\sigma(2),\cdots,2\sigma(m)-1,2\sigma(m))$$

によって定めると，対応 $\mathfrak{S}_m\ni\sigma\mapsto\widetilde{\sigma}\in\mathfrak{S}_{2m}$ は準同型写像であり，その像 $\{\widetilde{\sigma}:\sigma\in\mathfrak{S}_m\}$ と m 個の互換 $(1,2),(3,4),\cdots,(2m-1,m)$ によって生成される部分群 $\mathfrak{B}_m\subset\mathfrak{S}_{2m}$ は B_m 型 Weyl 群と同型である．このとき，$\mathfrak{F}_{2m}$ は $\mathfrak{S}_{2m}$ の $\mathfrak{B}_m$ による剰余類 $\mathfrak{S}_{2m}/\mathfrak{B}_m$ の完全代表系をなしている．このことに注意すると，パフィアンの定義式 (2) は，

$$\mathrm{Pf}\,A=\frac{1}{2^m m!}\sum_{\pi\in\mathfrak{S}_{2m}}a_{\pi(1),\pi(2)}a_{\pi(3),\pi(4)}\cdots a_{\pi(2m-1),\pi(2m)} \tag{3}$$

と書き直すことができる．

行列式，パフィアンは外積代数を用いて定義することもできる．K を標数 0 の体とし，K^n を列ベクトルのなす K 上の n 次元線型空間とする．このとき，

命題 2.2. (1) n 次正方行列 A と $v_1,\cdots,v_n\in K^n$ に対して，

$$Av_1\wedge Av_2\wedge\cdots\wedge Av_n=\det(A)\cdot v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_n. \tag{4}$$

(2) $2m$ 次反対称行列 A と $v_1,\cdots,v_{2m}\in K^{2m}$ に対して，

$$\left(\sum_{1\le i<j\le 2m}a_{ij}v_i\wedge v_j\right)^{\wedge m}=m!\,\mathrm{Pf}(A)\cdot v_1\wedge v_2\wedge\cdots\wedge v_{2m}. \tag{5}$$

ここで，$\omega^{\wedge m}=\omega\wedge\omega\wedge\cdots\wedge\omega$（$m$ 個）である．

命題 2.2 において $(v_1, \cdots, v_n)$ として K^n の標準基底をとることにより，行列式，パフィアンを定義することもできる．また，命題 2.2 を用いると，行列式，パフィアンの次の性質を示すことができる．

命題 2.3. (1) 2 つの n 次正方行列 A, B に対して，

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B). \tag{6}$$

(2) $2m$ 次反対称行列 A と $2m$ 次正方行列 T に対して，

$$\mathrm{Pf}\left({}^tTAT\right) = \det(T) \cdot \mathrm{Pf}(A). \tag{7}$$

特に，(7) において，T として対角行列，置換行列をとると，

$$\mathrm{Pf}\left(d_i d_j a_{ij}\right)_{1 \le i,\, j \le 2m} = d_1 \cdots d_{2m}\, \mathrm{Pf}\left(a_{ij}\right)_{1 \le i,\, j \le 2m}, \tag{8}$$

$$\mathrm{Pf}\left(a_{\sigma(i),\sigma(j)}\right)_{1 \le i,\, j \le 2m} = \mathrm{sgn}(\sigma)\, \mathrm{Pf}\left(a_{ij}\right)_{1 \le i,\, j \le 2m} \tag{9}$$

となることがわかる．

行列式，Pfaffian は，次の展開公式を用いて行列のサイズに関して帰納的に定義することもできる．ただし，サイズ 0 の行列式，パフィアンは 1 であると定義する．(ここでは，第 1 行に関する展開公式を与えるが，行列式，パフィアンの交代性 (7) と $\det({}^tA) = \det A$ と他の行（あるいは列）に関する展開公式も得られる．)

命題 2.4. (1) n 次正方行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i,\, j \le n}$ に対して，

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} a_{1k} \det A_k^1. \tag{10}$$

(2) $2m$ 次反対称行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i,\, j \le 2m}$ に対して，

$$\mathrm{Pf}\, A = \sum_{k=2}^{2m} (-1)^k a_{1k}\, \mathrm{Pf}\, A_{1,k}^{1,k}. \tag{11}$$

このパフィアンの展開公式 (11) を用いると，例えば次のようなパフィアンを計算することができる．

例 2.5. $x_i y_j$ を (i, j) 成分 $(i < j)$ とする反対称行列のパフィアンは，

$$\mathrm{Pf}\left(x_i y_j\right)_{1 \le i < j \le 2m} = \prod_{i=1}^{m} x_{2i-1} \prod_{j=1}^{m} y_{2j} \tag{12}$$

で与えられる．

実際，m に関する帰納法と (11) を用いて，次のようにして証明できる．$A = \left(x_i y_j\right)_{1 \le i < j \le 2m}$ とおくとき，帰納法の仮定を $A_{1,l}^{1,l}$ に適用すると，

$$\mathrm{Pf}\, A_{1,2k-1}^{1,2k-1} = x_2 x_4 \cdots x_{2k-2} x_{2k+1} \cdots x_{2m-1} y_3 y_5 \cdots y_{2k-3} y_{2k} \cdots y_{2m},$$
$$\mathrm{Pf}\, A_{1,2k}^{1,2k} = x_2 x_4 \cdots x_{2k-2} x_{2k+1} \cdots x_{2m-1} y_3 y_5 \cdots y_{2k-1} y_{2k+2} \cdots y_{2m}.$$

よって，$k \ge 2$ のとき $x_1 y_{2k-1}\, \mathrm{Pf}\, A_{1,2k-1}^{1,2k-1} = x_1 y_{2k}\, \mathrm{Pf}\, A_{1,2k}^{1,2k}$ となるから，展開公式 (11) を用いると，(12) が得られる．

$2m$ 次反対称行列 $A = (a_{ij})_{1 \le i,\, j \le 2m}$ に対して，反対称行列 $\widehat{A} = (\widehat{a}_{ij})_{1 \le i,\, j \le 2m}$ を

$$\widehat{A} = \left((-1)^{i+j-1} \operatorname{Pf} A_{i,j}^{i,j} \right)_{1 \le i < j \le 2m}$$

とおいて定める．パフィアンの交代性 (9) により，2 つの行（列）が一致する反対称行列のパフィアンは 0 となるから，与えられた反対称行列 A の第 j 行（列）を第 i 行（列）で置き換え，第 j 行で展開することにより，$i \neq j$ のとき

$$\sum_{k=1}^{2m} a_{i,k} \widehat{a}_{j,k} = 0$$

となることがわかる．よって，パフィアンの展開公式 (11) と合わせると，

$$A {}^t\widehat{A} = {}^t\widehat{A} A = (\operatorname{Pf} A) \cdot E_{2m}$$

となる．そこで，$\widehat{A}$ を A の**余パフィアン行列**と呼ぶことにする．

最後に，行列式，パフィアンは多重線型性，交代性によって定義することもできる．

命題 2.6. (1) 行列式 $\det X$ は，n 次正方行列 X の成分 x_{ij} $(1 \le i, j \le n)$ に関する多項式で次の 3 つの性質をみたすものとして特徴づけられる．

(a) x_{ij} の次数を $\deg x_{ij} = (0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0)$ と定めるとき，$\det X$ は $(1, 1, \cdots, 1)$ 次斉次である．

(b) 置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して，$\det \left(x_{\sigma(i),j} \right)_{1 \le i,j \le n} = \operatorname{sgn}(\sigma) \det \left(x_{i,j} \right)_{1 \le i,j \le n}$.

(c) 単位行列 E_n に対して，$\det E_n = 1$.

(2) パフィアン $\operatorname{Pf} X$ は，$2m$ 次反対称行列 X の成分 x_{ij} $(1 \le i < j \le 2m)$ に関する多項式で次の 3 つの性質をみたすものとして特徴づけられる．

(a) x_{ij} の次数を $\deg x_{ij} = (0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0, \overset{j}{1}, 0, \cdots, 0)$ と定めるとき，$\operatorname{Pf} X$ は $(1, 1, \cdots, 1)$ 次斉次である．

(b) 置換 $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ に対して，$\operatorname{Pf} \left(x_{\sigma(i),\sigma(j)} \right)_{1 \le i,j \le n} = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{Pf} \left(x_{i,j} \right)_{1 \le i,j \le n}$.

(c) $J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ を m 個対角線上に並べてできる反対称行列 $J_2^{\oplus m}$ に対して，$\operatorname{Pf} J_2^{\oplus m} = 1$.

3　行列式とパフィアンの関係

この節では，行列式をパフィアンで表す公式を紹介する．まず，行列式とパフィアンを結びつけるものとして最もよく知られているのが次の関係式である．

命題 3.1. $2m$ 次反対称行列 A に対して，

$$\det A = (\operatorname{Pf} A)^2 . \tag{13}$$

注意. 奇数次反対称行列 A に対しては，$\det A = 0$ である．

証明. いくつかの証明法が知られている（例えば，[30, Proposition 2.2] では組合せ論的に証明されている）が，ここでは，より一般に反対称行列 A と行（列）添字 $i_1, \cdots, i_{2l-1}, j, k$ に対して，

$$\det A(i_1, \cdots, i_{2l-1}, j; i_1, \cdots, i_{2l-1}, k) = \operatorname{Pf} A(i_1, \cdots, i_{2l-1}, j) \cdot \operatorname{Pf} A(i_1, \cdots, i_{2l-1}, k) \quad (14)$$

が成り立つことを，l に関する帰納法で証明する．($l = m$ とし，$i_1 = 1, \cdots, i_{2m-1} = 2m-1$, $j = k = 2m$ とすれば，(13) が得られる．)

まず，$l = 1$ のときは，$a_{j,i_1} = -a_{i_1,j}$ に注意すると，

$$\det \begin{pmatrix} 0 & a_{i_1,k} \\ a_{j,i_1} & a_{j,k} \end{pmatrix} = \operatorname{Pf} \begin{pmatrix} 0 & a_{i_1,j} \\ -a_{i_1,j} & 0 \end{pmatrix} \operatorname{Pf} \begin{pmatrix} 0 & a_{i_1,k} \\ -a_{i_1,k} & 0 \end{pmatrix}.$$

次に，$l \geq 2$ のときは，(14) の左辺の行列式を最後の行，列で展開することにより，

$$\begin{aligned} &\det A(i_1, \cdots, i_{2l-1}, j; i_1, \cdots, i_{2l-1}, k) \\ &\quad = \sum_{\alpha=1}^{2l-1} \sum_{\beta=1}^{2l-1} (-1)^{\alpha+\beta} a_{i_\alpha,j} a_{i_\beta,k} \det A(i_1, \cdots, \widehat{i_\alpha}, \cdots, i_{2l-1}; i_1, \cdots, \widehat{i_\beta}, \cdots, i_{2l-1}) \\ &\qquad\qquad + a_{j,k} \det A(i_1, \cdots, i_{2l-1}; i_1, \cdots, i_{2l-1}) \end{aligned}$$

となることがわかる．ここで，$A(i_1, \cdots, i_{2l-1}; i_1, \cdots, i_{2l-1})$ は奇数次交代行列だからその行列式は 0 である．また，最初の和に現れる行列式は，行（列）を並べ替えて帰納法の仮定を用いると，

$$\begin{aligned} &\det A(i_1, \cdots, \widehat{i_\alpha}, \cdots, i_{2l-1}; i_1, \cdots, \widehat{i_\beta}, \cdots, i_{2l-1}) \\ &\qquad = \operatorname{Pf} A(i_1, \cdots, \widehat{i_\alpha}, \cdots, i_{2l-1}) \cdot \operatorname{Pf} A(i_1, \cdots, \widehat{i_\beta}, \cdots, i_{2l-1}) \end{aligned}$$

となる．よって，展開公式 (11) を用いて和をまとめると，(14) の右辺が得られる． □

注意. 同様にして，反対称行列 A を行（列）添字 $i_1, \cdots, i_{2l}, j, k$ に対して，

$$\det A(i_1, \cdots, i_{2l}, j; i_1, \cdots, i_{2l}, k) = -\operatorname{Pf} A(i_1, \cdots, i_{2l}) \cdot \operatorname{Pf} A(i_1, \cdots, i_{2l}, j, k)$$

となることを示すことができる．例えば，[27, Lemma 9] を見よ．

命題 3.1 は，反対称行列という特別なクラスの行列の行列式がパフィアンで表されることを主張しているが，実は，次の命題 3.2 で見るように，行列式は特別な形の反対称行列のパフィアンとして表すことができ，行列式をパフィアンの特別な場合であるとみなすことができる．

命題 3.2. $m + n$ が偶数であるとき，$m \times n$ 行列 B に対して，

$$\operatorname{Pf} \begin{pmatrix} 0 & B \\ -{}^tB & 0 \end{pmatrix} = \begin{cases} (-1)^{m(m-1)/2} \det B & (m = n \text{ のとき}), \\ 0 & (m \neq n \text{ のとき}). \end{cases} \quad (15)$$

より一般に，$2m$ 次反対称行列 $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2m}$ と整数 r が，$a_{ij} = 0$ $(1 \leq i, j \leq r)$ をみたしているとき，

(1) $r > m$ ならば，$\operatorname{Pf} A = 0$.

(2) $r = m$ ならば，

$$\operatorname{Pf} A = (-1)^{m(m-1)/2} \det \left(a_{i,m+j}\right)_{1 \le i,\, j \le m}. \tag{16}$$

証明. (1) $r > m$ のとき，各 $\pi \in \mathfrak{F}_{2m}$ に対して，$\pi(2i) \le r$ となる i をとることができるから，$\prod_{k=1}^{m} a_{\pi(2k-1),\pi(2k)} = 0$ である．

(2) $r = m$ とする．$\pi \in \mathfrak{F}_{2m}$ に対して，もし $\pi(2i-1) > m$ となる i が存在するならば，$\pi(2j) \le m$ となる j が存在し $\prod_{k=1}^{m} a_{\pi(2k-1),\pi(2k)} = 0$ となる．そうでないならば，m 次対称群の元 σ を用いて

$$\pi = (1, m+\sigma(1), 2, m+\sigma(2), \cdots, m, m+\sigma(m))$$

と表され，転倒数を比較することにより $\operatorname{sgn}(\pi) = (-1)^{m(m-1)/2} \operatorname{sgn}(\sigma)$ となる．よって，

$$\operatorname{Pf} A = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_m} (-1)^{m(m-1)} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{k=1}^{m} a_{k,m+\sigma(k)} = (-1)^{m(m-1)} \det \left(a_{i,m+j}\right)_{1 \le i,j \le m}$$

となる． □

なお，公式 (7) において反対称行列 A として $J_2^{\oplus m}$ をとると，$2m$ 次正方行列 T の行列式を

$$\det T = \operatorname{Pf} \left(\sum_{k=1}^{m} \left(t_{2k-1,i} t_{2k,j} - t_{2k-1,j} t_{2k,i}\right) \right)_{1 \le i,j \le 2m}$$

と同じサイズのパフィアンとして表すこともできる．

4 パフィアンの公式から行列式の公式へ

行列式に対しては，Plücker 関係式，Desnanot–Jacobi の公式，Laplace 展開などさまざまな公式が知られている．一方，前節の命題 3.2 で見たように，行列式は特別な形をした反対称行列のパフィアンとして表される．そこで，(15) を通じて行列式の公式に対応するようなパフィアンの公式を考えることは自然な問題である．この節では，そのようなパフィアンの公式をいくつか取り上げる．（パフィアンのさまざまな公式については，[5], [7], [8], [15], [17], [30] も参照されたい．）

まず，Plücker 関係式のパフィアン版である太田–Wenzel の公式を紹介する．

命題 4.1 ([22], [32]). A を反対称行列とし，$i_1, \cdots, i_p, j_1, \cdots, j_q, k_1, \cdots k_r$（ただし，$p+r$, $q+r$ はともに奇数であるとする）を A の行（列）添字とする．このとき，

$$\begin{aligned} &\sum_{\alpha=1}^{p} (-1)^{\alpha} \operatorname{Pf} A(i_1, \cdots, \widehat{i_\alpha}, \cdots, i_p, k_1, \cdots, k_r) \operatorname{Pf} A(i_\alpha, j_1, \cdots, j_q, k_1, \cdots, k_r) \\ &\quad = \sum_{\beta=1}^{q} (-1)^{\beta} \operatorname{Pf} A(i_1, \cdots, i_p, k_1, \cdots, k_r, j_\beta) \operatorname{Pf} A(j_1, \cdots, \widehat{j_\beta}, \cdots, j_q, k_1, \cdots, k_r). \end{aligned} \tag{17}$$

ここで，$\widehat{i}$ は数列から i を取り除くことを意味する．

証明． まず，$r=0$ の場合を示す．(17) の左辺に現れる $\operatorname{Pf} A(i_\alpha, j_1, \cdots, j_q)$ を最初の行で，右辺に現れる $\operatorname{Pf} A(i_1, \cdots, i_p, j_\beta)$ を最後の行で展開すると，

$$
\begin{aligned}
\text{左辺} &= \sum_{\alpha=1}^{p} (-1)^\alpha \operatorname{Pf} A(i_1, \cdots, \widehat{i_\alpha}, \cdots, i_p) \sum_{\beta=1}^{q} (-1)^\beta a_{i_\alpha, j_\beta} \operatorname{Pf} A(j_1, \cdots, \widehat{j_\beta}, \cdots, j_q), \\
\text{右辺} &= \sum_{\beta=1}^{q} (-1)^\beta \sum_{\alpha=1}^{p} (-1)^\alpha a_{i_\alpha, j_\beta} \operatorname{Pf} A(i_1, \cdots, \widehat{i_\alpha}, \cdots, i_p) \operatorname{Pf} A(j_1, \cdots, \widehat{j_\beta}, \cdots, j_q).
\end{aligned}
$$

これを見比べると和をとる順序が違うだけなので，$r=0$ の場合の (17) の左辺と右辺が等しいことがわかる．

次に，r が一般の場合を示す．$r=0$ の場合の公式 (17) において，p, q をそれぞれ $p+r$, $q+r$ に置き換えると，

$$
\begin{aligned}
&\sum_{\alpha=1}^{p+r} (-1)^\alpha \operatorname{Pf} A(i_1, \cdots, \widehat{i_\alpha}, \cdots, i_{p+r}) \operatorname{Pf} A(i_\alpha, j_1, \cdots, j_{q+r}) \\
&\qquad\qquad = \sum_{\beta=1}^{q} (-1)^\beta \operatorname{Pf} A(i_1, \cdots, i_{p+r}, j_\beta) \operatorname{Pf} A(j_1, \cdots, \widehat{j_\beta}, \cdots, j_{q+r}).
\end{aligned}
$$

ここで，$i_{r+t} = j_{r+t} = k_t$ $(1 \le t \le r)$ ととると，左辺において $\alpha \ge p+1$ のとき $\operatorname{Pf} A(i_\alpha, j_1, \cdots, j_{q+r}) = 0$ となり，右辺において $\beta \ge q+1$ のとき $\operatorname{Pf} A(i_1, \cdots, i_{p+r}, j_\beta) = 0$ となるから，(17) が得られる． □

命題 4.1 を命題 3.2 の形の反対称行列に適用することにより，行列式に対する Plücker 関係式が得られる．

系 4.2. r 行からなる行列 B と列添字 $i_1, \cdots, i_{r+1}, j_1, \cdots, j_{r-1}$ に対して，

$$
\sum_{\alpha=1}^{r+1} (-1)^\alpha \det B([r]; i_1, \cdots, \widehat{i_\alpha}, \cdots, i_{r+1}) \det B([r]; i_\alpha, j_1, \cdots, j_{r-1}) = 0. \tag{18}
$$

証明． (17) を反対称行列 $A = \begin{pmatrix} O & B \\ -{}^tB & O \end{pmatrix}$ に適用し，$p = r+1$, $q = r-1$, $(i_1, \cdots, i_{r+1}) = (r+i_1, \cdots, r+i_{r+1})$, $(j_1, \cdots, j_{r-1}) = (r+j_1, \cdots, r+j_{r-1})$, $(k_1, \cdots, k_r) = (1, \cdots, r)$ ととる．このとき，パフィアンの交代性 (9) と命題 3.2 により，

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{Pf} A(r+i_1, \cdots, \widehat{r+i_\alpha}, \cdots, r+i_{r+1}, 1, \cdots, r) = (-1)^{r^2 + r(r+1)/2} \det B([r]; i_1, \cdots, \widehat{i_\alpha}, \cdots, i_{r+1}), \\
&\quad \operatorname{Pf} A(r+i_\alpha, r+j_1, \cdots, r+j_{r-1}, 1, \cdots, r) = (-1)^{r^2 + r(r+1)/2} \det B([r]; i_\alpha, j_1, \cdots, j_{r-1}), \\
&\quad \operatorname{Pf} A(r+i_1, \cdots, r+i_{r+1}, 1, \cdots, r, r+j_\beta) = 0
\end{aligned}
$$

となるから，太田–Wenzel の公式 (17) から行列式に対する Plücker 関係式 (18) が導かれる． □

太田–Wenzel の公式 4.1 の $p=1$, $q=3$ の場合を書き直すと，次のパフィアン版 Desnanot–Jacobi の公式が得られる．

命題 4.3. $2m$ 次反対称行列 $A=(a_{ij})_{1\le i,j\le 2m}$ と行 (列) 添字 $i<j<k<l$ に対して,

$$\operatorname{Pf} A\cdot\operatorname{Pf} A^{i,j,k,l}_{i,j,k,l}=\operatorname{Pf} A^{i,j}_{i,j}\cdot\operatorname{Pf} A^{k,l}_{k,l}-\operatorname{Pf} A^{i,k}_{i,k}\cdot\operatorname{Pf} A^{j,l}_{j,l}+\operatorname{Pf} A^{i,l}_{i,l}\cdot\operatorname{Pf} A^{j,k}_{j,k}. \tag{19}$$

証明. パフィアンの交代性 (9) を用いることにより,$(i,j,k,l)=(1,2,3,4)$ の場合を示せば十分である.このときは,太田–Wenzel の公式 (17) において,$p=1$, $q=3$, $r=2m-4$, $(i_1,j_1,j_2,j_3,k_1,\cdots,k_{2m-4})=(1,2,3,4,5,\cdots,2m)$ ととると,

$$\begin{aligned}\operatorname{Pf} A\cdot\operatorname{Pf} A(5,6,\cdots,2m)&=\operatorname{Pf} A(1,5,\cdots,2m,2)\cdot\operatorname{Pf} A(2,3,5,\cdots,2m)\\&\quad-\operatorname{Pf} A(1,5,\cdots,2m,3)\cdot\operatorname{Pf} A(2,4,5,\cdots,2m)\\&\quad+\operatorname{Pf} A(1,5,\cdots,2m,4)\cdot\operatorname{Pf} A(2,3,5,\cdots,2m).\end{aligned}$$

これをパフィアンの交代性を用いて書き直せば,(19) が得られる. □

同様に,パフィアン版 Desnanot–Jacobi の公式 (19) と命題 3.2 から,行列式に対する Desnanot–Jacobi の公式が導かれる.

系 4.4. n 次正方行列 B と行添字 $i<j$,列添字 $k<l$ に対して,

$$\det B\cdot\det B^{i,j}_{k,l}=\det B^{i}_{k}\cdot\det B^{j}_{l}-\det B^{i}_{l}\cdot\det B^{j}_{k} \tag{20}$$

証明. 命題 4.3 を $A=\begin{pmatrix}O & B\\ -{}^tB & O\end{pmatrix}$ と添字 $i<j<n+k<n+l$ に適用すればよい.(命題 3.2 により $\operatorname{Pf} A^{i,j}_{i,j}=0$ である.) □

これらの Desnanot–Jacobi の公式は,成分が行,列に関して一様に与えられている行列,反対称行列の行列式,パフィアンを計算するのに極めて有用である.次節では,パフィアン版 Desnanot–Jacobi の公式を用いて Schur のパフィアンやその一般化を証明するが,いわゆる Jacobi の公式もここで与えた Desnanot–Jacobi の公式の簡単な応用として得られる.

命題 4.5. A を $2m$ 次反対称行列 A とし,$\widehat{A}=\left((-1)^{i+j-1}\operatorname{Pf} A^{i,j}_{i,j}\right)_{1\le i<j\le 2m}$ を A の余パフィアン行列とする.このとき,$2r$ 個からなる $[2m]$ の部分集合 I に対して,

$$\operatorname{Pf}\widehat{A}(I)=(-1)^{\Sigma(I)-r}(\operatorname{Pf} A)^{r-1}\operatorname{Pf} A(I^c). \tag{21}$$

ここで,$\Sigma(I)=\sum_{i\in I} i$ であり,I^c は $[2m]$ における I の補集合である.

証明. $r=\#I/2$ に関する帰納法で示す.$r=1$ の場合は $\widehat{A}$ の定義から明らかだから,$r\ge 2$ とする.このとき,I から 4 つの元 $i<j<k<l$ をとり,パフィアン版 Desnanot–Jacobi の公式 (19) を用いると,

$$\operatorname{Pf}\widehat{A}(I)=\frac{1}{\operatorname{Pf}\widehat{A}(I-\{i,j,k,l\})}\times\begin{pmatrix}\operatorname{Pf}\widehat{A}(I-\{i,j\})\cdot\operatorname{Pf}\widehat{A}(I-\{k,l\})\\ -\operatorname{Pf}\widehat{A}(I-\{i,k\})\cdot\operatorname{Pf}\widehat{A}(I-\{j,l\})\\ +\operatorname{Pf}\widehat{A}(I-\{i,l\})\cdot\operatorname{Pf}\widehat{A}(I-\{j,k\})\end{pmatrix},$$

$$\operatorname{Pf} A(I)=\frac{1}{\operatorname{Pf} A(I^c\cup\{i,j,k,l\})}\times\begin{pmatrix}\operatorname{Pf} A(I^c\cup\{i,j\})\cdot\operatorname{Pf} A(I^c\cup\{k,l\})\\ -\operatorname{Pf} A(I^c\cup\{i,k\})\cdot\operatorname{Pf} A(I^c\cup\{j,l\})\\ +\operatorname{Pf} A(I^c\cup\{i,l\})\cdot\operatorname{Pf} A(I^c\cup\{j,k\})\end{pmatrix}.$$

これに注意して帰納法の仮定を用いれば,(21) が示される. □

再び命題 3.2 を用いると，行列式に対する Jacobi の公式が得られる．

系 4.6. B を n 次正方行列とし，$\widetilde{B} = \left((-1)^{i+j} \det B^i_j\right)_{1 \le i,j \le n}$ を B の転置余因子行列とする．このとき，r 個の元からなる $[n]$ の部分集合 I, J に対して，

$$\det \widetilde{B}(I, J) = (-1)^{\Sigma(I)+\Sigma(J)} (\det B)^{r-1} \det B(I^c, J^c). \tag{22}$$

ここで，I^c, J^c はそれぞれ $[n]$ における I, J の補集合である．

この節の最後に，パフィアン版 Laplace 展開を考える．

命題 4.7 ([6])**.** A を $2m$ 次反対称行列とし，$a_{ij} = 0$ $(1 \le i, j \le p)$ であると仮定する．このとき，

$$\operatorname{Pf} A = \sum_J (-1)^{\Sigma(J)-p} \operatorname{Pf} A(J) \operatorname{Pf} A(J^c). \tag{23}$$

ここで，J は $J \supset [p]$ をみたす $[2m]$ の $2p$ 元部分集合全体を動き，$J^c = [2m] - J$ である．

証明. p に関する帰納法で示す．左辺の $\operatorname{Pf} A$ を第 1 行で展開すると，仮定 $a_{ij} = 0$ $(1 \le i, j \le p)$ により，

$$\operatorname{Pf} A = \sum_{k=p+1}^{2m} (-1)^{k-1} a_{1,k} \operatorname{Pf} A^{1,k}_{1,k}.$$

帰納法の仮定を $\operatorname{Pf} A^{1,k}_{1,k}$ に適用すると，

$$\operatorname{Pf} A = \sum_{k=p+1}^{2m} (-1)^{k-1} \sum_I (-1)^{\Sigma'(I)-(p-1)} \operatorname{Pf} A(I) \operatorname{Pf}([2m] - (I \cup \{1, k\})). \tag{$*$}$$

ここで，I は $[2m] - \{1, k\}$ の $2(p-1)$ 元部分集合で $I \supset \{2, \cdots, p\}$ となるもの全体を動き，$\Sigma'(I) = \sum_{i \in I,\ i<k} (i-1) + \sum_{i \in I,\ i>k} (i-2)$ である．$2p$ 元部分集合 $J \subset [2m]$ で $J \supset [p]$ となるものを固定し，$J = \{1, 2, \cdots, p, j_{p+1}, \cdots, j_{2p}\}$ $(p < j_{p+1} < \cdots < j_{2p})$ と表すと，$(*)$ における $\operatorname{Pf} A(J^c)$ の係数は

$$\sum_{l=p+1}^{2p} (-1)^{j_l - 1 + \Sigma(J_l) - (p-1)} a_{1, j_l} \operatorname{Pf} A(J_l)$$

（ただし，$J_l = \{2, \cdots, p, j_{p+1}, \cdots, \widehat{j_l}, \cdots, j_{2p}\}$）で与えられる．ところが，

$$j_l - 1 + \Sigma(J_l) - (p-1) \equiv (l-1) + \Sigma(J) - p \bmod 2$$

だから，展開公式 (11) により $(*)$ における $\operatorname{Pf} A(J^c)$ の係数が $(-1)^{\Sigma(J)-p} \operatorname{Pf} A(J)$ となることがわかる． □

注意. 仮定 $a_{ij} = 0$ $(1 \le i, j \le p)$ を外した場合の公式は，[18, Theorem 4.2] にある．

系 4.8. n 次正方行列 B に対して，

$$\det B = \sum_I (-1)^{\Sigma(I) + p(p+1)/2} \det B([p]; I) \det B([p]^c, I^c). \tag{24}$$

ここで，I は $[n]$ の p 元部分集合全体を動き，I^c は $[n]$ における I の補集合を表す．

証明． 命題 4.7 を反対称行列 $A = \begin{pmatrix} O & B \\ -{}^tB & O \end{pmatrix}$ に適用する．$[p]$ を含む $2p$ 元部分集合 $J \subset [2n]$ に対して，命題 3.2 により，$J \cap [n] \neq [p]$ ならば $\mathrm{Pf}\, A(J) = 0$ である．また，$J \cap [n] = [p]$ ならば，$J = \{n+i_1, \cdots, n+i_p\}$ と表し，$I = \{i_1, \cdots, i_p\}$ とおくと，$\Sigma(J) = \Sigma(I) + np + p(p+1)/2$ であり，

$$
\begin{aligned}
&(-1)^{\Sigma(J)-p^2} \mathrm{Pf}\, A(J)\, \mathrm{Pf}\, A([2n]-J) \\
&= (-1)^{\Sigma(I)+np+p(p+1)/2-p^2} \cdot (-1)^{p(p+1)/2} \det B([p];I) \cdot (-1)^{(n-p)(n-p+1)/2} \det B([p]^c;I^c) \\
&= (-1)^{n(n+1)/2} \det B([p];I) \det B([p]^c;I^c).
\end{aligned}
$$

よって，(23) から (24) が導かれる． □

5 Cauchy の行列式，Schur のパフィアンとその一般化

次の Cauchy の行列式 ([2]) や Schur のパフィアン ([29], [20], [30]) は，対称関数の理論や表現論，組合せ論においてしばしば現れる．

命題 5.1.

$$
\det \left(\frac{1}{x_i + y_j} \right)_{1 \le i, j \le n} = \frac{\prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)(y_j - y_i)}{\prod_{i,j=1}^{n} (x_i + y_j)}, \tag{25}
$$

$$
\det \left(\frac{1}{1 - x_i y_j} \right)_{1 \le i, j \le n} = \frac{\prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)(y_j - y_i)}{\prod_{i,j=1}^{n} (1 - x_i y_j)}, \tag{26}
$$

$$
\mathrm{Pf} \left(\frac{x_j - x_i}{x_j + x_i} \right)_{1 \le i, j \le 2n} = \prod_{1 \le i < j \le 2n} \frac{x_j - x_i}{x_j + x_i}, \tag{27}
$$

$$
\mathrm{Pf} \left(\frac{x_j - x_i}{1 - x_i x_j} \right)_{1 \le i, j \le 2n} = \prod_{1 \le i < j \le 2n} \frac{x_j - x_i}{1 - x_i x_j}. \tag{28}
$$

証明． これらの公式の証明法はいくつかあるが，ここでは，まずパフィアン版 Desnanot–Jacobi の公式 (19) と帰納法を用いて (28) を証明し，そこから他の公式を導くことにする．（他の公式も Desnanot–Jacobi の公式を用いると，$n = 2$ の場合に帰着され簡単に証明できる．）

反対称行列 $A = \left(\frac{x_j - x_i}{1 - x_i x_j} \right)_{1 \le i, j \le 2n}$ に対して，パフィアン版 Desnanot–Jacobi の公式 (19) を適用し，帰納法の仮定を用いると，共通項をくくりだすことにより，

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Pf}\, A = &\prod_{i=1}^{4} \prod_{j=5}^{2n} \frac{x_j - x_i}{1 - x_i x_j} \prod_{5 \le i < j \le 2n} \frac{x_j - x_i}{1 - x_i x_j} \\
&\times \left(\frac{x_2 - x_1}{1 - x_1 x_2} \cdot \frac{x_4 - x_3}{1 - x_3 x_4} - \frac{x_3 - x_1}{1 - x_1 x_3} \cdot \frac{x_4 - x_2}{1 - x_2 x_4} + \frac{x_4 - x_1}{1 - x_1 x_4} \cdot \frac{x_3 - x_2}{1 - x_2 x_3} \right)
\end{aligned}
$$

となることがわかる．ここで，最後の項を計算すると，$\displaystyle\prod_{1\le i<j\le 4}\frac{x_j-x_i}{1-x_ix_j}$ に等しいことがわかるから，(28) が得られる．(最後の項が $\mathrm{Pf}\left(\dfrac{x_j-x_i}{1-x_ix_j}\right)_{1\le i,j\le 4}$ に他ならないことに注意する．)

次に，(28) から (26) を導く．(28) において $x_i\to tx_i$, $x_{n+i}\to y_i/t$ $(1\le i\le n)$ と置き換えると，(28) の左辺は (8) を用いることにより，

$$\mathrm{Pf}\left(\begin{array}{c|c}\dfrac{t(x_j-x_i)}{1-t^2x_ix_j} & \dfrac{y_j/t-x_it}{1-x_iy_j}\\ \hline \dfrac{x_jt-y_i/t}{1-x_jy_i} & \dfrac{(y_j-y_i)/t}{1-y_iy_j/t^2}\end{array}\right)=t^n\,\mathrm{Pf}\left(\begin{array}{c|c}\dfrac{1}{t}\cdot\dfrac{x_j-x_i}{1-t^2x_ix_j} & \dfrac{y_j/t^2-x_i}{1-x_iy_j}\\ \hline \dfrac{x_j-y_i/t^2}{1-x_jy_i} & \dfrac{(y_j-y_i)/t}{1-y_iy_j/t^2}\end{array}\right)$$

となり，一方で，(28) の右辺は

$$\begin{aligned}&\prod_{1\le i<j\le n}\frac{t(x_j-x_i)}{1-t^2x_ix_j}\prod_{i,j=1}^{n}\frac{y_j/t-tx_i}{1-x_iy_j}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{(y_j-y_i)/t}{1-y_iy_j/t^2}\\&\qquad=t^n\prod_{1\le i<j\le n}\frac{x_j-x_i}{1/t^2-x_ix_j}\prod_{i,j=1}^{n}\frac{y_j/t^2-x_i}{1-x_iy_j}\prod_{1\le i<j\le n}\frac{y_j-y_i}{1-y_iy_j/t^2}\end{aligned}$$

となる．よって，(28) の両辺を t^n で割り，$t\to\infty$ とすると，

$$\mathrm{Pf}\left(\begin{array}{c|c}O & \dfrac{-x_i}{1-x_iy_j}\\ \hline \dfrac{x_j}{1-x_jy_i} & O\end{array}\right)=\prod_{1\le i<j\le n}\frac{x_j-x_i}{-x_ix_j}\prod_{i,j=1}^{n}\frac{-x_i}{1-x_iy_j}\prod_{1\le i<j\le n}(y_j-y_i).$$

ここで，(15) を用いると，

$$\begin{aligned}\mathrm{Pf}\left(\begin{array}{c|c}O & \dfrac{-x_i}{1-x_iy_j}\\ \hline \dfrac{x_j}{1-x_jy_i} & O\end{array}\right)&=(-1)^{n(n-1)/2}\det\left(\frac{-x_i}{1-x_iy_j}\right)_{1\le i,\,j\le n}\\&=(-1)^{n(n+1)/2}\prod_{i=1}^{n}x_i\cdot\det\left(\frac{1}{1-x_iy_j}\right)_{1\le i,\,j\le n}\end{aligned}$$

となるから，Cauchy の行列式 (26) が導かれる．

最後に，残りの (27), (25) はそれぞれ (28), (26) において，$x_i\to(1-x_i)/(1+x_i)$, $y_j\to(1-y_j)/(1+y_j)$ と変数変換することによって得られる． □

長方形の Young 図形に対応する古典群の既約表現のテンソル積，部分群への制限や，交代符号行列の数え上げに現れる Izergin–Korepin 型の行列式，パフィアンを研究する過程

で，命題 5.1 の Cauchy の行列式，Schur のパフィアンの一般化（[24], [25], [10] を見よ）が見出されてきた．また，楕円関数版 [3], [26] も知られている．

ここでは，§7 で与える応用に用いる Schur のパフィアンの一般化（定理 5.2）を紹介する．公式を述べるために，次の行列を導入する．長さ n の変数ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ が与えられたとき，第 i 行が

$$(1 + a_i x_i^{n-1}, x_i + a_i x_i^{n-2}, \cdots, x_i^{n-1} + a_i)$$

で与えられる n 次正方行列を $W^n(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{a})$ と表す．例えば，$n = 2$ のとき，

$$W^2(x, y; a, b) = \begin{pmatrix} 1 + ax & x + a \\ 1 + by & y + b \end{pmatrix}$$

であり，

$$\det W^2(x, y; a, b) = (b - a)(1 - xy) + (1 - ab)(y - x)$$

である．このとき，

定理 5.2 ([24])**.** 長さ $2n$ の変数ベクトル $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_{2n})$, $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_{2n})$ に対して，

$$\mathrm{Pf}\left(\frac{\det W^2(x_i, x_j; a_i, a_j)}{1 - x_i x_j}\right)_{1 \le i, j \le 2n} = \frac{1}{\prod_{1 \le i < j \le 2n}(1 - x_i x_j)} \cdot \det W^{2n}(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{a}). \tag{29}$$

定理 5.2 において $a_1 = \cdots = a_{2n} = 0$ とおくと，$\det W^{2n}(\boldsymbol{x}; 0) = \prod_{1 \le i < j \le 2n}(x_j - x_i)$ だから，Schur のパフィアン (28) が復元される．

証明. 両辺ともに各 a_i については高々 1 次式だから，部分集合 $I \subset [2n]$ に対応する単項式 $a^I = \prod_{i \in I} a_i$ の係数を比較すればよい．

まず，パフィアンの定義 (2) から，(29) の左辺における a^I の係数は，(i, j) 成分が次で与えられる反対称行列 L_I のパフィアン $\mathrm{Pf}\, L_I$ に等しいことがわかる：

$$(L_I)_{i,j} = \begin{cases} -\dfrac{x_j - x_i}{1 - x_i x_j} & (i \in I \text{ かつ } j \in I \text{ のとき}), \\ -1 & (i \in I \text{ かつ } j \notin I \text{ のとき}), \\ 1 & (i \notin I \text{ かつ } j \in I \text{ のとき}), \\ \dfrac{x_j - x_i}{1 - x_i x_j} & (i \notin I \text{ かつ } j \notin I \text{ のとき}). \end{cases} \tag{30}$$

一方，第 i 行が

$$\begin{cases} \left(x_i^{2n-1}, x_i^{2n-2}, \cdots, x_i, 1\right) & (i \in I \text{ のとき}), \\ \left(1, x_i, \cdots, x_i^{2n-2}, x_i^{2n-1}\right) & (i \notin I \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられる $2n$ 次正方行列を R_I とすると，(29) の右辺における a^I の係数は，

$$\frac{1}{\prod_{1 \le i < j \le n}(1 - x_i x_j)} \cdot \det R_I$$

に等しいことがわかる．Vandermonde の行列式により

$$\det R_I = (-1)^{\Sigma(I)} \prod_{\substack{(i,j)\in I\times I\cup I^c\times I^c \\ i<j}} (x_j - x_i) \prod_{\substack{(i,j)\in I\times I^c\cup I^c\times I \\ i<j}} (1 - x_i x_j)$$

となるから，(29) の両辺における a^I の係数が等しいことを示すためには，次の補題を示せば十分である． □

補題 5.3 ([24])**.** $[2n]$ の部分集合 I に対して，(i,j) 成分が (30) で与えられる反対称行列を L_I とするとき，

$$\operatorname{Pf} L_I = (-1)^{\Sigma(I)} \prod_{\substack{(i,j)\in I\times I\cup I^c\times I^c \\ i<j}} \frac{x_j - x_i}{1 - x_i x_j}. \tag{31}$$

Schur のパフィアン (28) は，この (31) において $I = \emptyset$ あるいは $I = [2n]$ である場合に他ならない．

証明. [24] では石川–若山の小行列式の和公式と Littlewood の公式を用いて証明したが，ここでは n に関する帰納法とパフィアン版 Desnanot–Jacobi の公式を用いた証明を与える．

パフィアンの交代性 (9) により，$I = [r] = \{1, \cdots, r\}$ であるとしてよい．パフィアン版 Desnanot–Jacobi の公式 (19) を行（列）添字 $1, 2, 3, 4$ に対して適用する．例えば，$r = 1$ のときは，帰納法の仮定を用い，共通項をくくりだすと，

$$\operatorname{Pf} L_{[1]} = \prod_{i=2}^{4} \prod_{j=5}^{2n} \frac{x_j - x_i}{1 - x_i x_j} \prod_{5\le i<j\le 2n} \frac{x_j - x_i}{1 - x_i x_j} \cdot \left(\frac{x_4 - x_3}{1 - x_3 x_4} - \frac{x_4 - x_2}{1 - x_2 x_4} + \frac{x_3 - x_2}{1 - x_2 x_3} \right)$$

となる．最後の項を計算すると $-\prod_{2\le i<j\le 4} \frac{x_j - x_i}{1 - x_i x_j}$ と因数分解されるから，$I = [1]$ の場合の (31) が得られる．$r \ge 2$ の場合も同様である． □

6 小行列式の和公式

この節では，石川–若山 [12] による小行列式の和公式を紹介する．この公式は，与えられた行列の小行列式のパフィアンによる重みつき和を 1 つのパフィアンで表すものである.（同様の公式が積分の形で [1] で与えられている.）

定理 6.1 ([12])**.** n, N を $0 \le n \le N$ となる整数とし，$T = (t_{ij})_{1\le i\le n,\,1\le j\le N}$ を任意の $n \times N$ 行列とする．

(1) n が偶数であるとき，N 次反対称行列 $B = (b_{ij})_{1\le i,\,j\le N}$ に対して，

$$\sum_J \operatorname{Pf} B(J) \cdot \det T\left([n]; J\right) = \operatorname{Pf}\left(T B\, {}^t\!T\right). \tag{32}$$

ここで，和は $[N]$ の n 元部分集合 J 全体をわたる．

(2) n が奇数であるとき，$(N+1)$ 次反対称行列 $B=(b_{ij})_{0\le i,j\le N}$ に対して，

$$\sum_J \operatorname{Pf} B(J\cup\{0\})\cdot \det T\left([n];J\right)=\operatorname{Pf}\left(\widetilde{T}B\,{}^t\widetilde{T}\right). \tag{33}$$

ここで，和は $[N]$ の n 元部分集合 J 全体をわたり，

$$\widetilde{T}=\begin{pmatrix}1 & O\\ O & T\end{pmatrix}$$

である．

定理 6.1 (1) において，(32) の右辺の反対称行列 $Q=TB{}^tT$ の (i,j) 成分は，

$$Q_{ij}=\sum_{1\le k<l\le N} b_{kl}\det\begin{pmatrix}t_{ik} & t_{il}\\ t_{jk} & t_{jl}\end{pmatrix}$$

であり，T の第 i 行，第 j 行からできる 2 次小行列式の重みつきの和であることに注意する．例えば，重みを与える反対称行列 B として上三角部分の成分がすべて 1 である反対称行列 S をとると，例 2.5 により $\operatorname{Pf} S(J)=1$ となるから，(32) は

$$\sum_J \det T\left([n]\,;J\right)=\operatorname{Pf}\left(\sum_{1\le k<l\le N}\det\begin{pmatrix}t_{ik} & t_{il}\\ t_{jk} & t_{jl}\end{pmatrix}\right)_{1\le i,j\le n} \tag{34}$$

（ただし，J は $[N]$ の n 元部分集合全体を動く）の形になり，[23] によって与えられた和公式となる．

定理 6.1 を $A=\begin{pmatrix}O & B\\ -{}^tB & O\end{pmatrix}$, $T=\begin{pmatrix}R & O\\ O & S\end{pmatrix}$ の形の行列に適用すると，命題 3.2 を用いることにより，次の Binet–Cauchy の公式が導かれる．つまり，石川–若山の小行列式の和公式 (32) は，Binet–Cauchy の公式のパフィアン版であるともいえる．

系 6.2. m, M を $m\le M$ である正整数とする．M 次正方行列 B，$m\times M$ 行列 R, S に対して，

$$\sum_{I,J}\det B(I;J)\det R([m];I)\det S([m];J)=\det\left(RB\,{}^tS\right). \tag{35}$$

ここで，和は $[M]$ の m 元部分集合 I, J 全体をわたる．

定理 6.1 の証明． (1) $Q=TB{}^tT=(Q_{ij})_{1\le i,j\le n}$ とおき，体 K 上の n 次元線型空間 K^n の標準基底 $(e_1,\cdots,e_n)$ に対して，

$$\omega_Q=\sum_{1\le i<j\le n} Q_{ij}e_i\wedge e_j\in \bigwedge^2 K^n$$

を考える．$(\omega_Q)^{\wedge m}$ $(m=n/2)$ を 2 通りに計算する．まず，(5) より，

$$(\omega_Q)^{\wedge m}=m!\operatorname{Pf} Q\cdot e_1\wedge\cdots\wedge e_n$$

である．一方，B, T の成分を用いて $(\omega_Q)^{\wedge m}$ を表すと，

$$(\omega_Q)^{\wedge m} = \sum_{i_1,\cdots,i_n} \sum_{k_1,\cdots,k_n} \prod_{s=1}^{m} b_{k_{2s-1},k_{2s}} \prod_{r=1}^{m} \det T(i_{2r-1}, i_{2r}; k_{2s-1}, k_{2s}) e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n}.$$

ただし，和は $1 \le i_{2p-1} < i_{2p} \le n$, $1 \le k_{2p-1} < k_{2p} \le N$ $(1 \le p \le m)$ をみたす添字の列全体にわたる．ここで，$\omega_k = \sum_{i=1}^{n} t_{ik} e_i$ とおくと，$\sum_{1 \le i < j \le n} \det T(i,j;k,l) e_i \wedge e_j = \omega_k \wedge \omega_l$ だから，

$$\begin{aligned}(\omega_Q)^{\wedge m} &= \sum_{k_1,\cdots,k_n} \prod_{s=1}^{m} b_{k_{2s-1},k_{2s}} \omega_{k_1} \wedge \cdots \wedge \omega_{k_n} \\ &= \sum_{k_1,\cdots,k_n} \prod_{s=1}^{m} b_{k_{2s-1},k_{2s}} \det T(1,2,\cdots,n; k_1,\cdots,k_n) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n.\end{aligned}$$

この和を部分集合 $\{k_1, \cdots, k_n\}$ ごとに分け，$k_1, \cdots, k_n$ を昇順に並べ替え，行列式の交代性とパフィアンの定義 (2) を用いると，

$$(\omega_Q)^{\wedge m} = \sum_{J \in \binom{[N]}{n}} \operatorname{Pf} B(J) \det T([n]; J) e_1 \wedge \cdots \wedge e_n$$

となることがわかる．

(2) (1) を行列 $Q, \widetilde{T}$ に対して適用すればよい． □

7 応用

この節では，§5 で与えた Schur のパフィアン（命題 5.1）と §6 で与えた小行列式の和公式（定理 6.1）を利用して,（パラメータつきの）Littlewood の公式（定理 7.2）と，長方形の Young 図形に対応する古典群の既約指標を一般線型群に制限したときの既約分解（定理 7.4）を導く．Schur 関数などの古典群の指標に対する他の応用については，[24], [10], [11], [13], [14] を参照されたい．

まず，Schur 関数の定義を復習しておく．変数 $x_1, \cdots, x_n$ を用意し，x_i^{j-1} を (i,j) 成分 $(1 \le i \le n,\ j \ge 0)$ とする行列を T とする．

$$T = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & x_n^2 & x_n^3 & \cdots \end{pmatrix}. \tag{36}$$

また，長さ n 以下の分割 λ $(\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge 0)$ に対して，$\mathbb{N}$ の n 元部分集合

$$I(\lambda) = \{\lambda_1 + n - 1, \lambda_2 + n - 2, \cdots, \lambda_{n-1} + 1, \lambda_n\} \tag{37}$$

を対応させる．このとき，分割 λ に対応する Schur 関数 $s_\lambda(x_1, \cdots, x_n)$ は，

$$s_\lambda(x_1, \cdots, x_n) = \frac{\det T([n]; I(\lambda))}{\det T([n]; I(\emptyset))} \tag{38}$$

（ただし，$\emptyset = (0, \cdots, 0)$ である）によって定義される．ここで，$\Delta_n = \det T([n]; I(\emptyset))$ とおくと，

$$\Delta_n = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

である．

小行列式の和公式 (32) を (36) によって定義される行列 T に対して適用すると，次のような Schur 関数の重みつき和のパフィアンによる表示が得られる．

命題 7.1. 無限次反対称行列 $A = (a_{ij})_{i,\, j \ge 0}$ （あるいは，$(p+2m)$ 次反対称行列 $A = (a_{ij})_{0 \le i,\, j \le p+2m-1}$）が与えられたとき，

$$\sum_{\lambda} \operatorname{Pf} A(I(\lambda)) \cdot s_\lambda(x_1, \cdots, x_{2m}) = \frac{1}{\Delta_{2m}} \operatorname{Pf} \left(\sum_{k,l} a_{k,l} x_i^k x_j^l \right)_{1 \le i,\, j \le 2m}. \tag{39}$$

ここで，λ は長さ $2m$ 以下の分割（あるいは，$\lambda_1 \le p$ をみたす長さ $2m$ 以下の分割）全体を動く．

この命題 7.1 を具体的な状況に適用するためには，

(a) 反対称行列 A の部分パフィアン $\operatorname{Pf} A(I(\lambda))$ を計算する，

(b) パフィアン $\operatorname{Pf} \left(\sum_{k,l \ge 0} a_{k,l} x_i^k x_j^l \right)_{1 \le i,\, j \le 2m}$ を計算する，

必要がある．以下では，このような計算がうまくいく例を 2 つ挙げる．

1 つ目がパラメーターつきの Littlewood の公式 [I. Ex. 5.7, I. Ex. 5.8] である．

定理 7.2. 分割 λ に対して，その Young 図形において長さが奇数であるような列の個数を $c(\lambda)$，長さが奇数であるような行の個数を $r(\lambda)$ とする．このとき，

$$\sum_{\lambda : l(\lambda) \le n} t^{c(\lambda)} s_\lambda(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{1 - t x_i} \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{1 - x_i x_j}, \tag{40}$$

$$\sum_{\lambda : l(\lambda) \le n} u^{r(\lambda)} s_\lambda(x_1, \cdots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1 + u x_i}{1 - x_i^2} \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{1}{1 - x_i x_j}. \tag{41}$$

命題 7.1 を利用するためには，まず反対称行列 A で $\operatorname{Pf} A(I(\lambda)) = t^{c(\lambda)}$，あるいは，$\operatorname{Pf} A(I(\lambda)) = u^{r(\lambda)}$ となるようなものを見つけなければならない．

補題 7.3. $C = (c_{ij})_{i,\, j \ge 0}$, $R = (r_{ij})_{i,\, j \ge 0}$ を，(i, j) 成分 $(0 \le i < j)$ が次式で与えられる反対称行列とする：

$$c_{ij} = t^{j-i-1}, \qquad r_{ij} = u^{\mathrm{odd}(i) + \mathrm{even}(j)} \qquad (i < j).$$

ここで，

$$\mathrm{odd}(k) = \begin{cases} 1 & （k \text{ が奇数のとき}）, \\ 0 & （k \text{ が偶数のとき}）, \end{cases} \quad \mathrm{even}(k) = \begin{cases} 1 & （k \text{ が偶数のとき}）, \\ 0 & （k \text{ が奇数のとき}） \end{cases}$$

である．このとき，長さ $2m$ 以下の分割 λ に対して，$I(\lambda) = \{\lambda_1 + (2m-1), \cdots, \lambda_{2m}\}$ に対応する C, R の部分パフィアンは，

$$\operatorname{Pf} C(I(\lambda)) = t^{c(\lambda)}, \qquad \operatorname{Pf} R(I(\lambda)) = u^{r(\lambda)}$$

で与えられる．

行列 C, R を書き下してみると，

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & t & t^2 & t^3 & \cdots \\ & 0 & 1 & t & t^2 & \cdots \\ & & 0 & 1 & t & \cdots \\ & & & 0 & 1 & \cdots \\ & & & & 0 & \cdots \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}, \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & u & 1 & u & \cdots \\ & 0 & u^2 & u & u^2 & \cdots \\ & & 0 & 1 & u & \cdots \\ & & & 0 & u^2 & \cdots \\ & & & & 0 & \cdots \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

となる．

証明． $I(\lambda) = \{i_1, \cdots, i_{2m}\}$ $(i_1 < \cdots < i_{2m})$ とすると，

$$\operatorname{Pf} C(I(\lambda)) = \operatorname{Pf}\left(t^{i_l - i_k - 1}\right)_{1 \le k < l \le 2m}, \qquad \operatorname{Pf} R(I(\lambda)) = \operatorname{Pf}\left(u^{\mathrm{odd}(i_k) + \mathrm{even}(i_l)}\right)_{1 \le k < l \le 2m}.$$

よって，例 2.5 をそれぞれ $(x_p, y_p) = (t^{-i_p}, t^{i_p - 1})$, $(u^{\mathrm{odd}(i_p)}, u^{\mathrm{even}(i_p)})$ として用いると，

$$\operatorname{Pf} C(\lambda) = \prod_{k=1}^{m} t^{-i_{2k-1}} \prod_{k=1}^{m} t^{i_{2k} - 1}, \qquad \operatorname{Pf} R(\lambda) = \prod_{k=1}^{m} u^{\mathrm{odd}(i_{2k-1})} \prod_{k=1}^{m} u^{\mathrm{even}(i_{2k})}$$

となる．ここで，$i_p = \lambda_{2m+1-p} + (p-1)$ であり，$\lambda_p - \lambda_{p+1}$ が長さ p の列の個数に等しいことに注意すると，

$$\sum_{k=1}^{m} (-i_{2k-1} + i_{2k} - 1) = \sum_{l=1}^{m} (\lambda_{2l-1} - \lambda_{2l}) = c(\lambda),$$
$$\sum_{k=1}^{m} (\mathrm{odd}(i_{2k-1}) + \mathrm{even}(i_{2k})) = \sum_{p=1}^{2m} \mathrm{odd}(\lambda_p) = r(\lambda)$$

となるから，求める主張が得られる． □

よって，定理 7.2 を証明するためには，(39) の右辺のパファインを計算すればよい．

定理 7.2 の証明． 等比級数の和の公式を用いると，補題 7.3 の行列 R, C に対して，

$$\begin{aligned} \sum_{k,l \ge 0} r_{k,l} x_i^k x_j^l &= \sum_{0 \le k < l} t^{l-k-1} \det \begin{pmatrix} x_i^k & x_i^l \\ x_j^k & x_j^l \end{pmatrix} \\ &= \frac{x_j - x_i}{(1 - t x_i)(1 - t x_j)(1 - x_i x_j)}, \\ \sum_{k,l \ge 0} c_{k,l} x_i^k x_j^l &= \sum_{0 \le k < l} u^{\mathrm{odd}(k) + \mathrm{even}(l)} \det \begin{pmatrix} x_i^k & x_i^l \\ x_j^k & x_j^l \end{pmatrix} \\ &= \frac{(x_j - x_i)(1 + u x_i)(1 + u x_j)}{(1 - x_i)(1 - x_j)(1 - x_i x_j)}. \end{aligned}$$

よって，命題 7.1 の反対称行列 A として補題 7.3 の行列 C, R をとると，

$$\sum_{\lambda} t^{c(\lambda)} s_{\lambda}(x_1, \cdots, x_{2m}) = \frac{1}{\Delta_{2m}} \operatorname{Pf}\left(\frac{x_j - x_i}{(1-tx_i)(1-tx_j)(1-x_ix_j)}\right)_{1\le i,\, j\le 2m},$$
$$\sum_{\lambda} u^{r(\lambda)} s_{\lambda}(x_1, \cdots, x_{2m}) = \frac{1}{\Delta_{2m}} \operatorname{Pf}\left(\frac{(x_j - x_i)(1+ux_i)(1+ux_j)}{(1-x_i)(1-x_j)(1-x_ix_j)}\right)_{1\le i,\, j\le 2m}.$$

従って，(8) と Schur のパフィアン (28) を用いると，$n = 2m$ が偶数である場合に Littlewood の公式 (40), (41) が得られる．最後に，$n = 2m-1$ が奇数である場合は，$n = 2m$ の場合に $x_{2m} = 0$ を代入することにより導かれる． □

最後に，命題 7.1 の 2 つ目の応用例として，長方形の Young 図形に対応する古典群の既約指標を一般線型群に制限したときの既約分解（例えば [21, I. Ex. 5.16] を見よ）を与える．この証明の過程で Schur のパフィアンの一般化である (31) を用いる．考える表現は，

(a) ピン群 $\widetilde{\mathbf{O}}_{2n+1}$ の既約表現 $\widetilde{\mathbf{O}}_{2n+1}((s^n))$ （ただし，$s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ とする），

(b) 斜交群 $\mathbf{Sp}_{2n}$ の既約表現 $\mathbf{Sp}_{2n}((s^n))$ （ただし，$s \in \mathbb{N}$ とする）

である．これらの既約表現の指標 $\widetilde{\mathbf{O}}_{2n+1}((s^n);\boldsymbol{x})$, $\mathbf{Sp}_{2n}((s^n);\boldsymbol{x})$ は，Weyl の指標公式により，

$$\widetilde{\mathbf{O}}_{2n+1}((s^n);\boldsymbol{x}) = \frac{\det\left(x_i^{s+n+1/2-j} - x_i^{-s-n-1/2+j}\right)_{1\le i,\, j\le n}}{\det\left(x_i^{n+1/2-j} - x_i^{-n-1/2+j}\right)_{1\le i,\, j\le n}}, \tag{42}$$

$$\mathbf{Sp}_{2n}((s^n);\boldsymbol{x}) = \frac{\det\left(x_i^{s+n+1-j} - x_i^{-s-n-1+j}\right)_{1\le i,\, j\le n}}{\det\left(x_i^{n+1-j} - x_i^{-n-1+j}\right)_{1\le i,\, j\le n}} \tag{43}$$

によって与えられる．また，既約分解を記述するために，分割の集合 $\mathcal{P}((p^n))$, $\mathcal{E}((p^n))$ を

$$\mathcal{P}((p^n)) = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{N}^n : p \ge \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge 0\},$$
$$\mathcal{E}((p^n)) = \{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in (2\mathbb{N})^n : p \ge \lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_n \ge 0\}$$

とおいて定める．つまり，$\mathcal{P}((p^n))$ は $p \times n$ の長方形に Young 図形が含まれるような分割全体のなす集合であり，$\mathcal{E}((p^n))$ はそのうち行の長さがすべて偶数であるような分割全体のなす集合である．このとき，

定理 7.4. $\boldsymbol{x} = (x_1, \cdots, x_n)$ とする．

(1) 非負整数，あるいは，正の半整数 $s \in \frac{1}{2}\mathbb{N}$ に対して，

$$\widetilde{\mathbf{O}}_{2n+1}((s^n);\boldsymbol{x}) = (x_1 \cdots x_n)^{-s} \cdot \sum_{\lambda \in \mathcal{P}((2s)^n)} s_{\lambda}(\boldsymbol{x}).$$

(2) 非負整数 $s \in \mathbb{N}$ に対して，

$$\mathbf{Sp}_{2n}((s^n);\boldsymbol{x}) = (x_1 \cdots x_n)^{-s} \cdot \sum_{\lambda \in \mathcal{E}((2s)^n)} s_{\lambda}(\boldsymbol{x}).$$

まず，Schur 関数の定義 (38) と既約指標の定義 (42), (43) を用いると，

補題 7.5. (1) 長さ $n+1$ 以下の分割 $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n, \lambda_{n+1})$ に対して，

$$s_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n,\lambda_{n+1})}(x_1,\cdots,x_n,0) = \begin{cases} s_{(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)}(x_1,\cdots,x_n) & (\lambda_n = 0 \text{ のとき}), \\ 0 & (\lambda_n > 0 \text{ のとき}). \end{cases}$$

(2) $(x_1 \cdots x_{n+1})^s \cdot \widetilde{\mathbf{O}}_{2(n+1)+1}\left((s^{n+1}); (x_1, \cdots, x_{n+1})\right)$ は $x_1, \cdots, x_{n+1}$ に関する多項式であり，

$$\left[(x_1 \cdots x_{n+1})^s \cdot \widetilde{\mathbf{O}}_{2(n+1)+1}\left((s^{n+1}); (x_1, \cdots, x_{n+1})\right)\right]_{x_{n+1}=0} = (x_1 \cdots x_n)^s \cdot \widetilde{\mathbf{O}}_{2n+1}\left((s^n); (x_1, \cdots, x_n)\right).$$

(3) $(x_1 \cdots x_{n+1})^s \cdot \mathbf{Sp}_{2(n+1)}\left((s^{n+1}); (x_1, \cdots, x_{n+1})\right)$ は $x_1, \cdots, x_{n+1}$ に関する多項式であり，

$$\left[(x_1 \cdots x_{n+1})^s \cdot \mathbf{Sp}_{2(n+1)}\left((s^{n+1}); (x_1, \cdots, x_{n+1})\right)\right]_{x_{n+1}=0} = (x_1 \cdots x_n)^s \cdot \mathbf{Sp}_{2n}\left((s^n); (x_1, \cdots, x_n)\right).$$

また，補題 7.3 において $t=1, t=0$ ととると，

補題 7.6. 非負整数 p に対して，$(p+2m)$ 次反対称行列 $S = (s_{ij})_{0 \le i,j \le p+2m-1}$，$R = (r_{ij})_{0 \le i,j \le p+2m-1}$ を

$$s_{ij} = 1, \quad r_{ij} = \begin{cases} 1 & (i \text{ が偶数であり，} j \text{ が奇数であるとき}), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とおいて定義すると，長さ $2m$ 以下の分割 λ（ただし，$\lambda_1 \le p$ とする）に対して，

$$\operatorname{Pf} S(I(\lambda)) = 1, \quad \operatorname{Pf} R(I(\lambda)) = \begin{cases} 1 & (\lambda \in \mathcal{E}((p^{2m})) \text{ のとき}), \\ 0 & (\text{その他}). \end{cases}$$

この 2 つの補題に注意して，定理 7.4 を証明しよう．

定理 7.4 の証明. まず，補題 7.5 により，n が偶数である場合に示せば十分であることがわかる．そこで，以下では $n = 2m$ を偶数とする．

次に，命題 7.1 の反対称行列 A として，補題 7.6 の行列 S, R をとると，(39) の右辺のパフィアンの成分は，等比級数の和の公式を用いて計算することにより，

$$\sum_{0 \le k < l \le 2s+n-1} \det \begin{pmatrix} x_i^k & x_i^l \\ x_j^k & x_j^l \end{pmatrix} = \frac{(x_j - x_i)(1 - x_i^{2s+n} x_j^{2s+n}) - (1 - x_i x_j)(x_j^{2s+n} - x_i^{2s+n})}{(1-x_i)(1-x_j)(1-x_i x_j)}$$
$$= \frac{\det W^2(x_i, x_j; -x_i^{2s+n}, x_j^{2s+n})}{(1-x_i)(1-x_j)(1-x_i x_j)},$$

$$\sum_{\substack{0 \le k < l \le 2s+n-1 \\ k \text{ は偶数，} l \text{ は奇数}}} \det \begin{pmatrix} x_i^k & x_i^l \\ x_j^k & x_j^l \end{pmatrix} = \frac{\det W^2(x_i, x_j; -x_i^{2s+n+1}, x_j^{2s+n+1})}{(1-x_i)(1-x_j)(1-x_i x_j)}$$

で与えられることがわかる．よって，命題 7.1 により，

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}((2s)^n)} s_\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\prod_{i=1}^n(1-x_i)} \operatorname{Pf}\left(\frac{\det W^2(x_i,x_j;-x_i^{2s+n},-x_j^{2s+n})}{1-x_ix_j}\right)_{1\le i<j\le n},$$

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{E}((2s)^n)} s_\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)\prod_{i=1}^n(1-x_i^2)} \operatorname{Pf}\left(\frac{\det W^2(x_i,x_j;-x_i^{2s+n+1},-x_j^{2s+n+1})}{1-x_ix_j}\right)_{1\le i<j\le n}.$$

ここで，Schur のパフィアンの一般化（定理 5.2）を用いると，

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{P}((2s)^n)} s_\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{\det W^n(\boldsymbol{x};-\boldsymbol{x}^{2s+n})}{\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)(1-x_ix_j)\prod_{i=1}^n(1-x_i)},$$

$$\sum_{\lambda\in\mathcal{E}((2s)^n)} s_\lambda(\boldsymbol{x}) = \frac{\det W^n(\boldsymbol{x};-\boldsymbol{x}^{2s+n+1})}{\prod_{1\le i<j\le n}(x_j-x_i)(1-x_ix_j)\prod_{i=1}^n(1-x_i^2)}$$

となる．これらの右辺と既約指標の定義 (42), (43) を比較すると，結論が得られる． □

参考文献

[1] N. G. de Bruijn, On some multiple integrals involving determinants, J. Indian Math. Soc. (N.S.), **19** (1955), 133–151.

[2] A. L. Cauchy, Mémoire sur les fonctions alternées et sur les sommes alternées, Exercices Anal. et Phys. Math., **2** (1841), 151–159.

[3] G. Frobenius, Über die elliptischen Funktionen zweiter Art, J. für die reine und ungew. Math., **93** (1882), 53–68.

[4] B. Gordon and L. Houten, Notes on plane partitions II, J. Combin. Theory **4** (1968), 118–120

[5] 広田 良吾,『直接法によるソリトンの数理』, 岩波書店, 1992.

[6] 広田 良吾，BKP 方程式と解の pfaffian による表示と積分方程式,「ソリトン理論における広田の方法」，数理解析研究所講究録 **684** (1989), 33–62.

[7] 広田 良吾，行列式とパフィアン，応用数理 **14** (2004), 62–66, 178–184, 259–266, 381–389.

[8] 広田 良吾，Pfaffian による行列式の恒等式の一般化,「非線形波動および非線形力学系の数理とその応用」，九州大学応用力学研究所研究集会報告集 15ME-S3 (2004), 148–156.

[9] 石川 雅雄，岡田 聡一，行列式・パフィアンに関する等式とその表現論，組合せ論への応用，数学 **62** (2010), 85–114.

[10] M. Ishikawa, S. Okada, H. Tagawa and J. Zeng, Generalizations of Cauchy's determinant and Schur's Pfaffian, Adv. in Appl. Math., **36** (2006), 251–287.

[11] M. Ishikawa, S. Okada and M. Wakayama, Applications of minor-summation formula, I: Littlewood's formulas, J. Algebra, **183** (1996), 193–216.

[12] M. Ishikawa and M. Wakayama, Minor summation formula of Pfaffians, Linear and Multilinear Algebra, **39** (1995), 285–305.

[13] M. Ishikawa and M. Wakayama, New Schur function series, J. Algebra, **208** (1998), 480–525.

[14] M. Ishikawa and M. Wakayama, Applications of minor-summation formula, II: Pfaffians and Schur polynomials, J. Combin. Theory Ser. A, **88** (1999), 136–157.

[15] M. Ishikawa and M. Wakayama, Applications of minor summation formula, III: Plücker relations, lattice paths and Pfaffian identities, J. Combin. Theory Ser. A., **113** (2006), 113–155.

[16] P. W. Kasteleyn, The statistics of dimers on a lattice I : The number of dimer arrangements on a quadratic lattice, Physica **27** (1961), 1209–1225.

[17] D. E. Knuth, Overlapping Pfaffians, Electron. J. Combin., **3** (no. 2, The Foata Festschrift) (1996), #R5, 13 pp. (electronic).

[18] V. Kodiyalam, T. Y. Lam, and R. G. Swan, Determinantal ideals, Pfaffian ideals, and the principal minor theorem, in "Noncommutative rings, group rings, diagram algebras and their applications", Contemp. Math. **456** (2008), 35—60.

[19] C. Koutschan, M. Kauers, and D. Zeilberger, A proof of George Andrews' and David Robbins' q-TSPP conjecture, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **108** (2011), 2196–2199.

[20] D. Laksov, A. Lascoux and A. Thorup, On Giambelli's theorem on complete correlations, Acta Math., **162** (1989), 143–199.

[21] I. G. Macdonald, Symmetric Functions and Hall Polynomials, 2nd ed., Oxford Univ. Press, 1995.

[22] 太田泰広, Bilinear Theory of Solitons, 博士論文, 東京大学工学系研究科, 1992.

[23] S. Okada, On the generating functions for certain classes of plane partitions, J. Combin. Theory Ser. A, **51** (1989), 1–23.

[24] S. Okada, Applications of minor summation formulas to rectangular-shaped representations of classical groups, J. Algebra, **205** (1998), 337–367.

[25] S. Okada, Enumeration of symmetry classes of alternating sign matrices and characters of classical groups, J. Algebraic Combin., **23** (2006), 43–69.

[26] S. Okada, An elliptic generalization of Schur's Pfaffian identity, Adv. Math., **204** (2006), 530–538.

[27] S. Okada and C. Krattenthaler, The number of rhombus tilings of a "punctured" hexagon and the minor summation formula, Adv. in Appl. Math., **21** (1998), 381–404.

[28] J. E. Pfaff, Methodus generalis, aequationes defferetiarum partialium, nec non aequationes defferentiales vulgares, utrasque primi ordinis, inter quotcunque variabiles, completi integrandi, Abh. Kgl. Akad. Wiss. Berlin, math. Klasse (1814-1815), 76–136.

[29] I. Schur, Über die Darstellung der symmetrischen und der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen, J. reine angew. Math., **139** (1911), 155–250.

[30] J. R. Stembridge, Nonintersecting paths, Pfaffians, and plane partitions, Adv. Math., **83** (1990), 96–131.

[31] J. R. Stembridge, The enumeration of totally symmetric plane partitions, Adv. Math., **111** (1995), 227–243.

[32] W. Wenzel, Pfaffian forms and Δ-matroids, Discrete Math., **115** (1993), 253–266.