有理チェレドニック代数のウェイト加群

八尋耕平

2012 年 12 月

1　イントロダクション

有理チェレドニック代数は Etingof-Ginzburg[EG] によって定義された Symplectic refrection algebra の特別な場合で、最近活発に研究されている。Lie 環の包絡環との類似点も多く、その観点からの研究として、Category $\mathcal{O}$[GGOR]、primitive ideal の理論 [G]、超局所化 [KR] などの理論がある。

この講演では半単純リー環の理論におけるウェイト加群の理論の有理チェレドニック代数における類似について議論したい。

半単純リー環のウェイト加群の分類は Fernando[F], Mathieu[M] らによって得られている。この講演では彼らの方法が有理チェレドニック代数の場合にも適用できることを説明する。

2　半単純リー環のウェイト加群

この節では半単純リー環の既約ウェイト加群の分類についてまとめる。

$\mathfrak{g}$ を半単純リー環とし、$\mathfrak{h}$ をそのカルタン部分環とする。

定義 1. 有限生成 $\mathfrak{g}$ 加群 V がウェイト加群であるとは、V がウェイト分解 $V = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{h}^*} V_\lambda$ を持ち、ウェイト空間の次元がすべて有限であることをいう。

ウェイト加群の例としては有限次元表現や最高ウェイト加群がある。

最高ウェイト加群から最も遠い加群として、次のようなクラスのウェイト加群がある。

定義 2. ウェイト加群 V がカスピダルであるとは、すべてのルートベクトルが V に全単射で作用することを言う。

カスピダル加群に関しては Lemire らによる研究がある。

次の問題は表現論では基本的である。

問題　既約ウェイト加群を分類せよ。

この問題は Fernando, Mathieu らによって解かれた。

Fernando は次のことを示した。

定理 3.

1. [F, Lemma4.5] V を既約ウェイト $\mathfrak{g}$ 加群とし、$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \times \mathfrak{g}_2$ であるとする。

このとき、既約ウェイト $\mathfrak{g}_1$ 加群 V_1、既約ウェイト $\mathfrak{g}_2$ 加群 V_2 が存在し、$V \cong V_1 \boxtimes V_2$ を満たす。

2. [F, Theorem4.18] V を既約ウェイト $\mathfrak{g}$ 加群とする。
このとき $\mathfrak{g}$ の放物型部分環 $\mathfrak{p}$ と、$\mathfrak{p}$ のレビ部分環 $\mathfrak{l}$ の既約カスピダルウェイト加群 V' が存在して $V \cong Top(\mathcal{U}(\mathfrak{g}) \otimes_{\mathcal{U}(\mathfrak{p})} V')$ を満たす。ただしここで $\mathfrak{p}$ の冪零根基は V' に自明に作用するものとする。
3. [F, Theorem5.12] カスピダルウェイト加群は A 型と C 型のときにしか存在しない。

定理 3 の 1 により既約ウェイト加群の分類は単純リー環の場合に帰着される。定理 3 の 2, 3 により $\mathfrak{sl}$ および $\mathfrak{sp}$ の場合にカスピダルウェイト加群を分類すればよいことがわかる。

Mathieu はカスピダル加群を認容最高ウェイト加群から構成する方法を発見し、すべてのカスピダル加群がこの方法で得られることを示した。この方法については有理チェレドニック代数の場合に §4 で説明する。Mathieu は既約認容最高ウェイト加群の分類も与え、既約ウェイト加群の分類を完成させた。

3 有理チェレドニック代数

有理チェレドニック代数は複素鏡映群に対して定義できるが、ここでは実鏡映群に限って話を進める。

$W \curvearrowright \mathfrak{h}$ を実鏡映群、S を W の鏡映の集合とする。$c : S \to \mathbb{C}$ を共役類上で一定な S 上の関数とする。

定義 4. W に付随する有理チェレドニック代数とは代数 $T(\mathfrak{h} \oplus \mathfrak{h}^*) \rtimes W$ を以下の関係式で割ったものである。

$$\begin{aligned} [x_1, x_2] &= 0 \qquad (x_1, x_2 \in \mathfrak{h}) \\ [y_1, y_2] &= 0 \qquad (y_1, y_2 \in \mathfrak{h}^*) \\ [y, x] &= \langle y, x \rangle - \sum_{s \in S} \langle y, \check{\alpha}_s \rangle \langle \alpha_s, x \rangle c(s) s \qquad (x \in \mathfrak{h}, y \in \mathfrak{h}^*) \end{aligned}$$

ただしここで α_s, $\check{\alpha}_s$ はルート、コルートを表し、$\langle \alpha_s, \check{\alpha}_s \rangle = 2$ となるようにとるものとする。

以下では有理チェレドニック代数を H_c とかく。

c が 0 のときはワイル代数と W の半直積になる。c が一般のときにも似たような性質をもつ

そのひとつは PBW-property である。定義より、自然な写像 $S(\mathfrak{h}) \to H_c$ および $S(\mathfrak{h}^*) \to H_c$ がある。これらの射に対し次が成立する。

定理 5 (PBW-property,[EG])**.** 積写像 $S(\mathfrak{h}) \otimes \mathbb{C}[W] \otimes S(\mathfrak{h}^*) \to H_c$ は線形同型

また、有理チェレドニック代数には微分差分作用素 (Dunkl 作用素) を用いた次のような実現が知られている。

定理 6. [D]

$$\begin{array}{ccc} H_c & \hookrightarrow & \mathcal{D}((\mathfrak{h}^*)^{reg}) \rtimes W \\ x & \mapsto & x \\ y & \mapsto & \partial_y + \displaystyle\sum_{s \in S} \frac{\check{\alpha}_s(y)}{\check{\alpha}_s}(s-1) \\ w & \mapsto & w \end{array}$$

有理チェレドニック代数に対し、オイラー作用素の類似を次のように定義する

定義 7 (オイラー元)**.** $\mathfrak{h}$ の基底 $\{x_i\}$ をとり、その双対基底を $\{y_i\}$ とする。H_c の元を $\mathrm{Eu} = \frac{1}{2}\sum_i (x_i y_i + y_i x_i)$ で定める。これを H_c のオイラー元と呼ぶ

オイラー元は次の交換関係を満たす。

補題 8.

$$[\mathrm{Eu}, x] = x \qquad (x \in \mathfrak{h})$$

$$[\mathrm{Eu}, y] = -y \qquad (y \in \mathfrak{h}^*)$$

$$[\mathrm{Eu}, w] = 0 \qquad (w \in W)$$

この関係式からもわかるように、オイラー元は Dunkl 作用素を用いた実現ではほぼオイラー作用素になる。

W が実鏡映群のときにはさらにオイラー元が半単純元であるような $\mathfrak{sl}_2$-triple を構成できる。$\{x_i\}$ を W 不変な $\mathfrak{h}$ 上の内積に関する正規直交基底とし、その双対基底を $\{y_i\}$ とする。$e := \frac{1}{2}\sum_i x_i$, $f := -\frac{1}{2}\sum_i y_i$ と定める。

補題 9. $\{e, \mathrm{Eu}, f\}$ は $\mathfrak{sl}_2$-triple をなす。

この $\mathfrak{sl}_2$-triple に対しては次のことが知られている。

定理 10. $\{e, \mathrm{Eu}, f\}$ の随伴作用から定まる $\mathfrak{sl}_2$ の H_c への作用は局所有限であり、したがって H_c は有限次元既約 $\mathfrak{sl}_2$ 加群の直和となる。

とくに $ad(e)$, $ad(f)$ の H_c への作用は局所冪零である。

4 有理チェレドニック代数の既約ウェイト加群

有理チェレドニック代数にはカルタン部分環にあたるもので、ウェイト分解を定義するのにちょうどよい部分環が見つかっていないので、ここでは Euler 元が対角的に作用するものをウェイト加群と呼ぶ。

定義 11. H_c 加群 V に Euler 元が対角的に作用し、各固有空間が有限次元のとき、V をウェイト加群とよぶ。

例 12 (最高ウェイト、最低ウェイト加群)**.** $\mathfrak{h}$ と $\mathbb{C}[W]$ で生成される H_c の部分環は PBW-property から $S(\mathfrak{h}) \rtimes W$ と同型である。W の既約表現 σ に対し、$S(\mathfrak{h}) \rtimes W$ 加群構造を $\mathfrak{h}$ が 0 で作用するように定める。すると誘導加群 $\mathrm{Ind}_{S(\mathfrak{h})\rtimes W}^{H_c}\sigma =: V^{\downarrow}(\sigma)$ はウェイト加群である。PBW-property により $V^{\downarrow}(\sigma)$ は $S(\mathfrak{h}^*) \rtimes W$ 加群としては $S(\mathfrak{h}^*) \otimes \sigma$ と同型である。

同様に σ を $S(\mathfrak{h}^*) \rtimes W$ 加群とみなして得られる誘導加群を $V^{\uparrow}(\sigma)$ とかく。これは $S(\mathfrak{h}) \rtimes W$ 加群としては $S(\mathfrak{h}) \otimes \sigma$ と同型になる。

半単純リー環の Verma 加群と同様に $V^{\downarrow}(\sigma)$, $V^{\uparrow}(\sigma)$ はただひとつの既約商を持つ。それらを $L^{\downarrow}(\sigma)$, $L^{\uparrow}(\sigma)$ とかくことにする。

$V^{\downarrow}(\sigma)$, $V^{\uparrow}(\sigma)$ から全射がある (ウェイト)H_c 加群をそれぞれ最高ウェイト加群、最低ウェイト加群と呼ぶ。既約最高ウェイト加群および既約最低ウェイト加群は $L^{\downarrow}(\sigma)$ および $L^{\uparrow}(\sigma)$ しかない。

ウェイト加群をこのように定義するとカスピダル加群は e, f を用いて次のように定義できる。

定義 13. ウェイト H_c 加群 V に e, f が全単射で作用するとき、V をカスピダルウェイト加群とよぶ。

この定義の下で、次が成立する。

定理 14. 既約ウェイト加群は最高ウェイト、最低ウェイト、カスピダルのいずれかである。

今はカルタン部分環に当たるものが 1 次元なので放物型誘導に対応するものは現れない。

証明の方針

$V^e := \{v \in V | \ \exists n, \ e^n v = 0\}$ とし、V^f も同様に定める。$ad(e)$ が H_c に局所冪零に作用するので、これらは V の H_c 部分加群である。

$V^e \neq 0$ ならば V が最高ウェイト加群であることを示す。すると $V^f \neq 0$ ならば V が最低ウェイトであることが同様に示せ、$V^e = V^f = 0$ ならばウェイト空間の有限次元性によりカスピダルであるので証明が完了する。

$V^e \neq 0$ ならば V が最高ウェイト加群であることを示すには、まず $\mathfrak{sl}_2$ の表現論を使って V のウェイトが上に有界であることを示す。すると有理チェレドニック代数の圏 $\mathcal{O}$ の理論から 0 でない写像 $V^{\downarrow}(\sigma) \to V$ の存在がわかる。V は既約なので最高ウェイト加群となる。

すでに述べたとおり既約最高ウェイト加群と既約最低ウェイト加群の分類はわかっているので、既約カスピダル加群について考える。そのためにまずは Mathieu の方法を述べる。

環 H_c を e で局所化した環 $H_c[e^{-1}]$ を考える。この環の中で等式

$$e^n a e^{-n} = \sum_{i=0}^{\infty} \binom{n}{i} ad(e)^i a e^{-i} \quad (a \in H_c[e^{-1}], n \in \mathbb{N})$$

が成立する。$ad(e)$ が局所冪零なのでこの式の右辺は n を任意の複素数 s に置き換えても意味を持つ。

補題 15. $H_c[e^{-1}]$ から $H_c[e^{-1}]$ への線形写像を

$$a \mapsto \sum_{i=0}^{\infty} \binom{s}{i} ad(e)^i a e^{-i}$$

でさだめると、これは H_c の自己同型を与える。

最低ウェイト既約表現 V を e で局所化し、それを補題で得られた自己同型でひねることにより新しい H_c 加群が得られる。これを $e^{-s}V$ とかく。これが半単純リー環のカスピダル表現を統一的に得るために Mathieu が用いた方法である。

$e^{-s}V$ のウェイト空間が有限次元であること保障するためには V に次の仮定が必要である。

定義 16. ウェイト H_c 加群 V のウェイト空間の次元がある整数で一様に上から抑えられていて、さらに無限次元であるとき、V を認容ウェイト加群とよぶ。

すると次の定理が成立する。

定理 17.

1. V を既約認容最低ウェイト H_c 加群とする。このとき、ある有限集合 $S \subset \mathbb{C}$ があって、任意の $s \in \mathbb{C} \setminus (S + \mathbb{Z})$ に対し $e^{-s}V$ は既約カスピダルウェイト加群となる。
2. V を既約カスピダルウェイト H_c 加群とする。このときある既約最低ウェイト H_c 加群 V' と $s \in \mathbb{C}$ があって $V \cong e^{-s}V'$ となる。

証明の概略

1. ウェイト H_c 加群 M がカスピダルであることと $M^e = M^f = 0$ は同値である。$\mathfrak{sl}_2$ の表現論から $(e^{-s}V)^e = 0$ は s の値によらず成り立つ。

あるsについて $(e^{-s}V)^f \neq 0$ とする。このとき圏 $\mathcal{O}$ の一般論からある 0 でない写像 $M^{\uparrow}(\sigma) \to e^{-s}V$ が存在する。そこで $S = \{\frac{1}{2}(V$ のウェイトのひとつ$) - \frac{1}{2}(M^{\uparrow}(\sigma)$ の最低ウェイト$) \mid \sigma:\ W$ の既約表現 $\}$ とおけばよい。

2. $(e^{s}V)^f \neq 0$ なる s があればよい。このような s の存在は $\mathfrak{sl}_2$ の場合 [M, Lemma5.1] から直ちに従う。

5 既約認容最高ウェイト加群の分類

既約ウェイト H_c 加群の分類は認容最高ウェイト加群の場合に帰着されたが、既約認容最高ウェイト加群の分類は部分的にしか得られていない。既約認容最高ウェイト加群の分類が得られているのは, A, B, I_2, H_3 型の実鏡映群の場合である。A 型および B 型の場合については [W], [SV] を参照せよ。この節では I_2, H_3 型の場合の分類を述べる。

5.1 $\mathrm{I}_2(m)$ 型

この場合には、Chmutova[C] により既約最低ウェイト加群を Eu の作用の固有値により $\mathbb{C}$ 次数つき加群と思ったときの次数つき指標が計算されている。

$W = W_{I_2(m)}$ は群としては $\langle a, b | a^m = b^2 = abab = 1\rangle$ と同型で $\langle a, b | a^m = b^2 = abab = 1\rangle \to GL(2, \mathbb{C})$, $a \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\frac{2\pi}{m}) & -\sin(\frac{2\pi}{m}) \\ \sin(\frac{2\pi}{m}) & \cos(\frac{2\pi}{m}) \end{pmatrix}$, $b \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ により与えられる。

m が偶数か奇数で様子が異なる。

m が奇数のときはパラメータがひとつなのでそれを c とおく。同型 $H_c \to H_{-c}$ が $x \mapsto x$, $y \mapsto y$, $a, b \mapsto -a, -b$ により得られるので $c > 0$ としてよい。

$L^{\uparrow}(\sigma)$ が認容となる c と σ の組は、c が半整数のときの自明表現だけである。

m が偶数のときは鏡映の集合が $S = \{b, a^2b, \dots a^{m-2}b\} \sqcup \{ab, \dots a^{m-1}b\}$ と二つの共役類にわかれる。$n := \frac{m}{2}$ とする。$c_1 := c(b)$, $c_2 := c(ab)$ とおく。$H_{c_1,c_2} \to H_{\pm c_1, \pm c_2}$, $x \mapsto x$, $y \mapsto y$, $a, b \mapsto \pm a, \pm b$ という 4 つの同型と $H_{c_1,c_2} \to H_{c_2,c_1}$, $x \mapsto x$, $y \mapsto y$, $a, b \mapsto a, ab$ という同型がある。W の既約表現は 1 次元表現が 4 つと $(n-1)$ 個の 2 次元表現 $\tau_i, a \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\frac{2i\pi}{m}) & -\sin(\frac{2i\pi}{m}) \\ \sin(\frac{2i\pi}{m}) & \cos(\frac{2i\pi}{m}) \end{pmatrix}, b \mapsto \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(1 < i \leq \frac{m}{2} - 1)$ がある。したがって $c_1, c_2 > 0$ としてよく、また c_1, c_2 に関して対称である。

$L^{\uparrow}(\sigma)$ が認容となる c_1, c_2 と σ の組は

(1) c_1 が半整数、c_2 は半整数でない、$c_1 + c_2$ は $\frac{r}{n}$, r は n で割れない、を満たす c_1, c_2 と自明表現。

(2) $c_1 + c_2$ は $\frac{r}{n}$ で r を m で割ったあまりは $\pm l$、$c_1 - c_2$ は $\frac{r}{n}$ で r を m で割ったあまりは $\pm l$、$|k_1|$ と $|k_2|$ の小さいほうが半整数でない、を満たす c_1, c_2 と τ_l $(1 \leq l < n)$

である。

5.2 H_3 型

この型に対しては最高ウェイト加群の指標が Balagovic-Puranik[BP] によって得られている。この小節での記号は [BP] に従う。

このときはパラメータはひとつしかないので、それを c とかく。I 型の場合と同様、$c > 0$ としてよい。

$L^{\uparrow}(\sigma)$ が認容である c と σ の組は、$c = \frac{1}{5}, \frac{9}{5}$ のときの $\tilde{3}_-$、$c = \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{7}{5}, \frac{8}{5}$ のときの 1_+, 3_-、$c = \frac{4}{5}, \frac{6}{5}$ のと

きの $1_+, \tilde{3}_-$、$c = \frac{r}{3}, r : odd$ のときの $1_+, 4_+$、$c = \frac{r}{3}, r : even$ のときの $1_+, 4_-$ である。

参考文献

[BP] Balagovic and Puranik, *Irreducible representations of the rational Cherednik algebra associated to the Coxeter group H_3* arXiv:1004.2108v3

[C] Chmutova, *Representations of the rational Cherednik algebras of dihedral type*, J. Algebra **297** (2006), no. 2, 542–565.

[D] Dunkl, *Differential-difference operators associated to reflection groups*, Trans. Amer. Math. Soc., **311** (1989), no 1, 167–183.

[EG] Etingof and Ginzburg, *Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism*, Invent. math., **143** (2002), 243–6348.

[F] Fernando, *Lie algebra modules with finite-dimensional weight spaces. I*, Trans. Amer. Math. Soc. **322** (1990), no. 2, 757–781.

[G] Ginzburg, *On primitive ideals*, Selecta Math. (N.S.) **9** (2003), no. 3, 379–407.

[GGOR] Ginzburg, Guay, Opdam and Rouquier, *On the category O for rational Cherednik algebras*, Invent. math., **154** (2003), 617–651.

[KR] Kashiwara and Rouquier, *Microlocalization of rational Cherednik algebras*, Duke Math. J. **144** (2008), no. 3, 525–573.

[M] Mathieu, *Classification of irreducible weight modules*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **50** (2000), no. 2, 537–592.

[SV] Shan and Vasserot, *Heisenberg algebras and rational double affine Hecke algebras*, J. Amer. Math. Soc. **25** (2012), no. 4, 959–1031.

[W] Wilcox, *Representations of the rational Cherednik algebra*, Thesis (Ph.D.)-Harvard University. 2011.